



GURU PEMBELAJAR

MODUL PELATIHAN

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI A

PEDAGOGIK

KARATERISTIK PERKEMBANGAN PESERTA DIDIK

PROFESIONAL

BILANGAN, NOTASI SIGMA, BARISAN DAN DERET

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui program Guru Pembelajar (GP) merupakan upaya peningkatan kompetensi untuk semua guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui uji kompetensi guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG melalui program Guru Pembelajar. Tujuannya untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pola tatap muka, daring (online), dan campuran (blended) tatap muka dengan online.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang

dikembangkan tersebut adalah modul untuk program Guru Pembelajar (GP) tatap muka dan GP online untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program GP memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan program GP ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, Maret 2016

Direktur Jenderal

Guru dan Tenaga Kependidikan,

Sumarna Surapranata, Ph.D.

NIP 195908011985031002



GURU PEMBELAJAR

MODUL PELATIHAN MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI A PEDAGOGIK

KARATERISTIK PERKEMBANGAN PESERTA DIDIK

**DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016**

Penulis:

1. Dr. R. Rosnawati., 08164220779, rosnawati_slamet@gmail.com

Ilustrator:

Febriarto Cahyo Nugroho

Copyright © 2016

Direktorat Pembinaan Guru Pendidikan Dasar, Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan Kebudayaan.

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan. Salah satu Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pendidikan dan pelatihan (Diklat) Guru Pembelajar.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan dibawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Diklat Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggungjawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016
Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.
NIP 196002231985032001

Daftar ISI

KATA PENGANTAR.....	Error! Bookmark not defined.
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR.....	ix
DAFTAR TABEL	xi
PENDAHULUAN.....	1
A. LATAR BELAKANG.....	1
B. TUJUAN	2
C. PETA KOMPETENSI.....	2
D. RUANG LINGKUP	2
E. SARAN CARA PENGGUNAAN MODUL	3
KEGIATAN BELAJAR 1	5
PERKEMBANGAN KARATERISTIK PESERTA DIDIK.....	5
A. TUJUAN	5
B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI.....	5
C. URAIAN MATERI	5
D. AKTIFITAS PEMBELAJARAN	14
E. LATIHAN/KASUS/TUGAS	16
F. RANGKUMAN	17
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT.....	18
KEGIATAN BELAJAR 2	21
KERAGAMAN DALAM KEMAMPUAN DAN KEPERIBADIAN PESERTA DIDIK	21
A. TUJUAN	21
B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI.....	21
C. URAIAN MATERI	21
D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN.....	33
E. LATIHAN/KASUS/TUGAS	34
F. RANGKUMAN	37
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT.....	37
EVALUASI.....	41

Daftar Isi

PENUTUP	43
DAFTAR PUSTAKA	45
GLOSARIUM	47

Daftar Gambar

Gambar 1, Komponen Otak Kiri dan Otak Kanan.....	7
Gambar 2. Tahapan Perkembangan Intelektual Invidividu	11
Gambar 3. Delapan Tipe Intelligency	24



Daftar Tabel

Daftar Tabel

Table 1. Delapan Tipe Inteligensi Howard Gardner	24
Table 2. Perbedaan Gender dan Implikasinya	32



Daftar Tabel

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Merujuk pada Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya memunculkan paradigma baru profesi guru. Konsekuensinya adalah guru dituntut melakukan pengembangan keprofesian secara terus menerus (berkelanjutan) sehingga guru dapat menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional. Masih merujuk pada Permenpan dan RB tersebut, pengembangan keprofesian yang dilakukan guru meliputi kegiatan pengembangan diri yaitu diklat fungsional dan kegiatan kolektif guru serta publikasi ilmiah dan karya inovasi. Dengan demikian guru diharapkan selalu mengembangkan diri, selalu belajar agar dapat membelajarkan peserta didik atau dengan kata lain guru sebagai guru pembelajar.

Guru pembelajar selalu menyiapkan rencana penyampaian bahan ajar, yang mempertimbangkan kemampuan peserta didik, dan tidak mendominasi interaksi di dalam kelas. Ia menempatkan diri sebagai teman, fasilitator dan konselor bagi siswa. Singkatnya, guru pembelajar memberikan peluang kepada peserta didik untuk mencoba belajar dengan kemampuan sendiri, atau dalam bekerja sama dengan temannya.

Berkaitan dengan hal ini dikembangkan modul guru pembelajar. Modul Guru Pembelajar adalah substansi materi yang dikemas guna membantu guru mencapai kompetensi yang telah ditetapkan, terutama kompetensi pedagogik dan kompetensi profesional. Modul Guru Pembelajar pada intinya merupakan model bahan belajar (*learning material*) yang menuntut peserta pelatihan untuk belajar lebih mandiri dan aktif.

Salah satu kompetensi yang harus dikuasai guru adalah pemahaman terkait dengan karakteristik perkembangan peserta didik. Oleh karena itu dalam modul ini dijabarkan materi terkait dengan karakteristik perkembangan peserta didik ditinjau dari perkembangan kognitif, emosi dan social siswa. Dibahas pula perbedaan keragaman peserta didik yang dilatar belakangi oleh latar belakang keluarga yang bervariasi, serta beberapa sumber variasi yang cukup berperan.

B. Tujuan

Secara umum tujuan yang dicapai setelah peserta diklat mempelajari modul ini adalah memahami perkembangan karakteristik peserta didik khususnya pada level SMA. Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah peserta diklat dapat.

1. Peserta diklat atau pembaca memahami macam karakteristik peserta didik dan keberagaman dari peserta didik.
2. Peserta diklat atau pembaca mampu menerapkan pembelajaran yang sesuai dengan karakteristik dan keberagaman yang dimiliki peserta didik.

C. Peta Kompetensi

1. Menguasai karakteristik peserta didik dari aspek fisik,
2. Menguasai karakteristik peserta didik dari moral,
3. Menguasai karakteristik peserta didik dari spiritual,
4. Menguasai karakteristik peserta didik dari social dan cultural
5. Menguasai karakteristik peserta didik dari emosional,
6. Menguasai karakteristik peserta didik dari intelektual
7. Memahami keberagaman peserta didik

D. Ruang Lingkup

Untuk mencapai kompetensi yang telah ditetapkan, lingkup materi yang dikembangkan adalah sebagai berikut:

1. Perkembangan peserta didik dari aspek fisik, moral, spiritual, sosial, cultural, emosional, dan intelektual. Adapun teori perkembangan kognitif yang akan dibahas adalah teori tahapan perkembangan kognitif Piaget, tahapan perkembangan Bruner, tahapan perkembangan Neo-Piaget.
2. Keragaman dalam kemampuan dan kepribadian peserta didik khususnya peserta didik pada level SMA, ditinjau dari aspek fisik, inteligensi, gaya belajar peserta didik

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk memanfaatkan bahan belajar ini, peserta diklat atau pembaca perlu membaca petunjuk belajar ini beserta dengan evaluasinya.

1. Untuk keperluan diklat

Jika bahan belajar ini digunakan dalam kegiatan diklat maka sebaiknya fasilitator menyusun poin-poin bahan belajar ini untuk dijadikan sebagai bahan tayang. Selanjutnya peserta melakukan kegiatan atau pengerjaan tugas sesuai dengan langkah-langkah yang sudah dirancang dalam bahan belajar ini. Langkah-langkah yang dimaksud sebagai berikut:

- Fasilitator menyampaikan poin-poin kegiatan yang akan dilakukan
- Peserta diklat mengerjakan tugas atau latihan yang didampingi fasilitator. Upayakan permasalahan tuntas dibahas dalam kegiatan ini. Untuk membantu penyelesaian tugas, peserta dapat merujuk bahan bacaan yang ada di bagian akhir bahan belajar ini. Sangat dimungkinkan juga peserta/pembaca mencari referensi dari bahan bacaan lain atau sumber lain.
- Selanjutnya, cocokan hasil pengerjaan evaluasi dengan alternatif kunci jawaban. Untuk melihat ketercapaian kompetensi dan langkah apa yang mesti dilakukan silahkan lihat bagian tindak lanjut.

2. Untuk keperluan referensi sendiri

Jika bahan belajar ini digunakan untuk keperluan referensi secara mandiri, maka pembaca perlu memulainya secara urut dari bagian pertama sampai bagian evaluasi. Sangat disarankan untuk tidak membuka kunci jawaban terlebih dahulu sebelum pembaca mencermati keseluruhan isi bahan belajar.

Kegiatan Belajar 1

Perkembangan Karakteristik Peserta Didik

A. Tujuan

Secara umum tujuan yang dicapai setelah peserta diklat mempelajari Kegiatan Belajar-1 ini adalah memahami perkembangan karakteristik peserta didik pada level SMA, yang digunakan sebagai salah satu pertimbangan dalam perencanaan bahan ajar, dan pelaksanaan proses belajar mengajar agar hasil belajar siswa optimal. Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah peserta diklat dapat.

1. Menjelaskan pengertian perkembangan peserta didik
2. Menjelaskan tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget
3. Menjelaskan tahapan perkembangan kognitif menurut Neo-Piaget
4. Menjelaskan tahapan perkembangan sosial
5. Menjelaskan tahapan perkembangan emosional

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menjelaskan pengertian perkembangan peserta didik
2. Menjelaskan tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget
3. Menjelaskan tahapan perkembangan kognitif menurut Neo-Piaget
4. Menjelaskan tahapan perkembangan sosial
5. Menjelaskan tahapan perkembangan emosional

C. Uraian Materi

1. Pengertian Perkembangan

Perkembangan pada peserta didik terjadi karena adanya serangkaian perubahan baik yang tampak kasat mata maupun yang tidak tampak. Hurlock mengemukakan bahwa perkembangan atau *development* merupakan serangkaian perubahan progresif yang terjadi sebagai akibat dari proses kematangan dan pengalaman. Ini berarti, perkembangan terdiri atas serangkaian perubahan baik fisik maupun psikis yang bersifat progresif (maju). Perubahan progresif yang berlangsung terus menerus sepanjang hayat memungkinkan manusia

menyesuaikan diri dengan lingkungan di mana manusia hidup. Sikap manusia terhadap perubahan berbeda-beda tergantung beberapa faktor, diantaranya pengalaman pribadi, stereotipe dan nilai-nilai budaya, perubahan peran, serta penampilan dan perilaku seseorang.

Lefrancois (1975) berpendapat bahwa konsep perkembangan mempunyai makna yang lebih luas, mencakup segi-segi kuantitatif dan kualitatif serta aspek fisik-psikis seperti terkandung dalam istilah-istilah pertumbuhan. Umumnya perubahan kuantitatif disebut juga "pertumbuhan". Pertumbuhan pada aspek fisik seperti penambahan tinggi, berat dan proporsi badan seseorang. Sedangkan perubahan kualitatif umumnya digunakan untuk melihat perubahan aspek psikofisik, seperti peningkatan kemampuan berpikir, berbahasa, perubahan emosi, perubahan spiritual, sikap, dan lain-lain. Faktanya pada diri individu kadangkala terjadi perubahan ke arah berlawanan atau berlawanan dengan penambahan atau peningkatan, tetapi mengalami pengurangan seperti gejala lupa dan pikun. Jadi perkembangan bersifat dinamis dan tidak pernah statis.

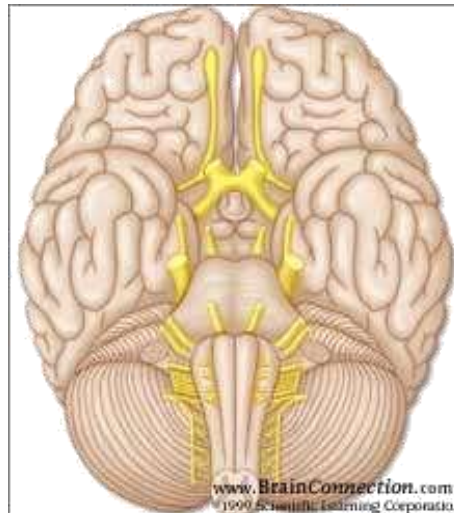
Perubahan kualitatif dari peningkatan kemampuan berpikir dapat dilihat dari perkembangan kualitas kemampuan otak. Bila dikaji lebih jauh otak manusia terbagi menjadi dua yaitu otak kiri dan otak kanan yang sebenarnya terhubung oleh *corpus callosum*. Pengalaman individu yang memungkinkan terlatihnya otak kanan saja, tidak berarti akan secara otomatis melatih otak kiri, begitu pula sebaliknya. Saat seseorang berpikir keadaan *corpus callosum* dapat terbuka atau dapat tertutup, bila *corpus callosum* terbuka, maka olahan berpikir yang dihasilkan individu tersebut di atas olahan berpikir pada umumnya. Berikut adalah kemampuan yang ada pada otak kiri dan otak kanan.

OTAK KIRI

OTAK

KANAN

Logis
Urut
Linier
Konvergen
Bahasa
Membaca
Menulis
Kognisi



Intuitif
Acak
Divergen
Ide/gagasan
Gambar
Seni

Gambar 1, Komponen Otak Kiri dan Otak Kanan

Terjadinya dinamika dalam perkembangan disebabkan adanya kematangan dan pengalaman yang mendorong seseorang untuk memenuhi kebutuhan aktualisasi/realisasi diri. Kematangan merupakan faktor internal (dari dalam) yang dibawa setiap individu sejak lahir, seperti ciri khas, sifat, potensi dan bakat. Pengalaman merupakan intervensi faktor eksternal (dari luar) terutama lingkungan sosial budaya di sekitar individu. Faktor kematangan dan pengalaman ini secara bersama-sama mempengaruhi perkembangan seseorang, sebagaimana paham teori konvergensi.

Menurut teori Konvergensi yang dikemukakan oleh Stern, perkembangan seseorang merupakan hasil proses kematangan dan belajar. Stern memadukan atau mengkonvergensi teori Naturalisme dan Empirisme. Menurut teori Naturalisme, perkembangan seseorang terutama ditentukan oleh faktor alam (*nature*), bakat pembawaan, keturunan atau gen seseorang, termasuk di dalamnya kematangan seseorang. Sementara itu, teori Empiris berpendapat bahwa perkembangan seseorang terutama ditentukan oleh faktor lingkungan tempat individu itu berada dan tumbuh kembang, termasuk di dalamnya lingkungan keluarga, sekolah dan belajar anak.

Kenyataannya, faktor pembawaan maupun lingkungan *saling mempengaruhi* dalam perkembangan seseorang. Faktor bawaan dan lingkungan keduanya dapat dibedakan tetapi tidak dapat dipisahkan dalam perkembangan seseorang. Faktor lingkungan akan mempengaruhi faktor bawaan begitu pula sebaliknya serta keduanya saling berinteraksi. Seorang siswa yang mempunyai bakat musik, misalnya, perkembangan bakat atau kemampuan bermain musiknya tidak akan optimal apabila tidak mendapatkan kesempatan belajar musik. Jadi, potensi yang dimiliki siswa/peserta didik yang dibawa sejak lahir akan berkembang optimal, apabila didukung oleh lingkungannya. Dukungan itu di antaranya dengan penyediaan sarana prasarana serta kesempatan untuk belajar dan mengembangkan potensi dirinya. Begitu pula sebaliknya, seorang anak yang tampaknya tidak memiliki bakat dalam musik, apabila diberikan lingkungan yang menjadikan anak tersebut berlatih seni, akan menunjukkan kemampuan dalam bermusik.

Memperhatikan kompleksitas dari sifat perkembangan perilaku dan pribadi, para ahli telah mencoba mengembangkan model pentahapan (stage) dari proses perkembangan yang dihasilkan melalui *longitudinal* maupun *cross section*.

2. Perkembangan Fisik

Perkembangan fisik meliputi perubahan-perubahan dalam tubuh (pertumbuhan otak, sistem syaraf, otot, dan lain-lain) dan perubahan dalam cara individu dalam menggunakan tubuhnya. Beberapa tokoh memodelkan tahap perkembangan fisik sebagai berikut.

1. Aristoteles (384-322 SM)

Tahap perkembangan individu menurut tokoh ini terdiri dari tiga tahapan berdasarkan perubahan ciri fisik tertentu.

- Masa kanak-kanak (0-7) : Ciri-ciri Pergantian gigi
- Masa anak sekolah (7-14): Ciri-ciri Gejala pubertas
- Masa Remaja (14-21) : Ciri-ciri primer dan sekunder

2. Hurlock (1952)

Hurlock membagi fase perkembangan individu secara lengkap sebagai berikut:

- *Prenatal (conceptin-280 days)*
- *Infancy (0-10 to 14 days)*
- *Babyhood (2 weeks – 2 years)*
- *Childhood (2 years – adolence)*
- *Adolescence 13 (girls) – 21 years*
14 (boys) – 21 years
- *Adulthood (21- 25 years)*
- *Middle age (25-30 years)*
- *Old age (30 years-death)*

Bila dikaji menurut tahapan perkembangan fisik Hurllok, siswa SMA berada pada masa remaja. Lebih lanjut Hurlock (1992) memberikan ciri-ciri remaja, antara lain :

- a. Masa remaja sebagai periode pelatihan. Tahap remaja belum dapat dikatakan sebagai orang dewasa, dan bukan masa kanak-kanak. Masa transisi ini memberi waktu padanya untuk mencoba gaya hidup yang berbeda dan menentukan pola perilaku, nilai dan sifat yang paling sesuai dengan dirinya.
- b. Masa remaja sebagai periode perubahan. Perubahan yang terjadi pada tahap remaja adalah perubahan pada emosi, perubahan tubuh, minat dan peran (menjadi dewasa yang mandiri), perubahan pada nilai-nilai yang dianut, serta keinginan akan kebebasan.
- c. Masa remaja sebagai masa mencari identitas diri yang dicari remaja berupa usaha untuk menjelaskan siapa dirinya dan apa peranannya dalam masyarakat.
- d. Masa remaja cenderung berperilaku yang kurang baik. Hal ini yang membuat banyak orang tua menjadi takut.
- e. Masa remaja adalah masa yang tidak realistik. Remaja cenderung memandang kehidupan dari kacamata berwarna merah jambu, melihat dirinya sendiri dan orang lain sebagaimana yang diinginkan dan bukan sebagaimana adanya terlebih dalam cita-cita.
- f. Remaja mengalami kebingungan atau kesulitan di dalam usaha meninggalkan kebiasaan pada usia sebelumnya dan di dalam memberikan kesan bahwa mereka hampir atau sudah dewasa, yaitu dengan merokok,

minum-minuman keras, menggunakan obat-obatan dan terlibat dalam perilaku seks. Mereka menganggap bahwa perilaku ini akan memberikan citra yang mereka inginkan.

Dalam kegiatan tertentu dalam proses belajar mengajar dapat dirancang kegiatan sedemikian sehingga dapat membantu percepatan pertumbuhan fisik peserta didik. Salah satu implikasi bagi pendidikan adalah perlunya memperhatikan sarana dan prasarana, waktu istirahat, serta jam olah raga bagi siswa. Sedangkan dalam jam pelajaran matematika dapat dilakukan dengan memperhatikan kesesuaian sarana dan prasana di dalam kelas, baik berkaitan dengan kursi dan meja belajar serta media yang digunakan langsung dalam pembelajaran.

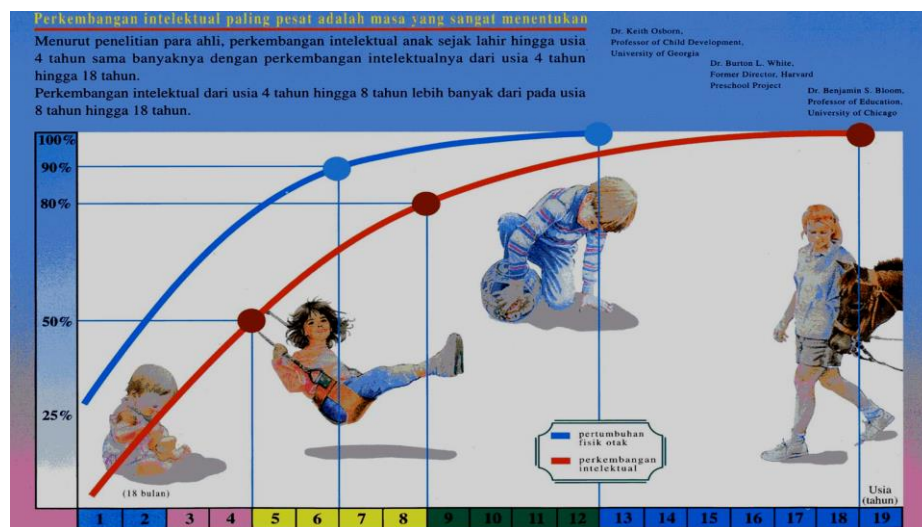
3. Perkembangan Kognitif

Studi yang intensif pernah dilakukan oleh Piaget (mulai tahun 1920 sampai 1964) dan rekan-rekannya, mengenai perkembangan kognitif individu. Piaget membagi tahapan perkembangan kognitif sebagai berikut:

- 1) *Sensorimotor* (0-2). Prestasi intelektual yang dicapai dalam periode ini adalah perkembangan bahasa, hubungan antara objek, control skema, pengenalan hubungan sebab-akibat
- 2) *Preoperational* (2-7). Dalam tahap preoperasional anak menunjukkan penguasaan simbol yang lebih besar. Perkembangan bahasa bertambah secara dramatis dan permainan imajinatif lebih tampak. Pada tahap ini anak masih berpikir egosentris, yaitu memandang sesuatu dari dirinya sendiri. Pada tahap ini anak masih menggunakan intuisi dan tidak dengan logika dalam menyelesaikan masalah.
- 3) *Concrete operational* (7-12). Perilaku kognitif yang tampak pada periode ini adalah kemampuan dalam proses berpikir untuk mengoperasikan kaidah-kaidah logika meskipun masih terikat dengan obyek-obyek yang bersifat konkret. Pada tahap ini 5 hukum konservasi dikuasai, yaitu konservasi banyaknya (kuantitas), konservasi materi, konservasi panjang, konservasi luas, konservasi berat, dan konservasi volume. Ciri lain dari tahap ini adalah kemampuan reversibility. Sebagai contoh jika

anak sudah mengenal $3 \times 2 = 6$, kemudian $3 \times \dots = 6$, dapatkah kalian menentukan bilangan pada titik-titik tersebut.

- 4) *Formal operational* (12-dewasa). Periode ini ditandai dengan kemampuan untuk mengoperasikan kaidah-kaidah logika formal yang tidak terikat lagi oleh objek-objek yang bersifat konkrit. Perilaku kognitif yang tampak pada periode ini adalah: kemampuan berpikir hipotesis deduktif (*hypothetical deductive thinking*); kemampuan mengembangkan suatu kemungkinan berdasarkan dua atau lebih kemungkinan yang ada (*a combinational analysis*); kemampuan mengembangkan suatu proporsi atas dasar proporsi-proporsi yang diketahui (*proportional thinking*); kemampuan menarik generalisasi dan inferensi dari berbagai kategori objek yang beragam. Perkembangan kognitif digambarkan seperti pada gambar 2 berikut.



Gambar 2. Tahapan Perkembangan Intelektual Individu

Menurut Piaget proses perkembangan fungsi-fungsi dan perilaku kognitif berlangsung mengikuti suatu system atau prinsip mencari keseimbangan (*seeking equilibrium*), dengan menggunakan dua cara atau teknik *assimilation* dan *accommodation*. Teknik asimilasi digunakan apabila individu dihadapkan pada hal-hal baru yang dihadapinya dapat disesuaikan dengan kerangka berpikir atau *cognitive-structure* yang dimilikinya. Sedangkan teknik akomodasi digunakan apabila individu memandang objek-objek atau masalah-masalah baru tidak dapat diselesaikan dengan kerangka berpikirnya yang ada sehingga ia harus mengubah *cognitive-structure*nya.

Tokoh lain yang melakukan penelitian terkait perkembangan kognitif adalah Jerome Bruner (1966). Bruner membagi proses perkembangan perilaku kognitif ke dalam tiga periode yaitu:

1. *Enactive stage*, merupakan suatu masa di mana individu berusaha memahami lingkungannya; tahap ini mirip dengan sensori motor period dari Piaget
2. *Iconic stage*, merupakan tahapan masa yang mendekati kepada tahapan preoperational period dari Piaget. Kegiatan penyajian dilakukan berdasarkan pada pikiran internal di mana pengetahuan disajikan melalui serangkaian gambar-gambar atau grafik yang dilakukan anak, berhubungan dengan mental yang merupakan gambaran dari objek-objek yang dimanipulasinya.
3. *Symbolic stage*, merupakan tahapan di mana individu telah mampu memiliki idea tau gagasan abstrak yang sangat dipengaruhi oleh kemampuan dalam bahasa dan logika.

Berbeda dengan pandangan Piaget bahwa seorang anak yang menunjukkan tingkat tertentu dari penalaran abstrak pada soal yang diberikan akan cenderung menunjukkan bahwa tingkat yang sama dari penalaran abstrak pada banyak masalah lain, pandangan neo-Piaget menunjukkan bahwa anak-anak (dan orang dewasa) menunjukkan berbagai tingkat penalaran abstrak pada masalah yang berbeda (Hamilton & Ghatala, 1994: 227). Di antara teori neo-Piaget antara lain adalah Case, Fischer (1980), dan Pascual-Leone (1970, 1988), masing-masing dari teori neo-Piaget memuat premis umum teori piaget yaitu terkait dengan tahapan perkembangan kognitif selanjutnya dikombinasikan dengan ide-ide tentang pengaruh pengalaman pada perkembangan yang lebih analitis spesifik dan lebih selaras dengan perbedaan budaya dan individu.

Case (1996: 219-223) mencoba untuk memperbaiki beberapa kekurangan dalam teori Piaget dengan memasukkan ide-ide lain, khususnya teori konstruktivis sosial Vygotsky, teori pemrosesan informasi, linguistik, dan neuroscience. Menurut Case ada empat tahap dari tingkatan perkembangan kognitif, yaitu

- 1) *sensorimotor* (0–1,5 tahun),

- 2) *interrelational* (1,5–5 tahun),
- 3) *dimensional* (5–11 tahun), dan
- 4) *vectorial* (11–19 tahun).

Berdasarkan perkembangan kognitif neo-piaget dari Case, siswa SMA berada tahap *vectorial*. Pada tahap *vectorial* ini, kemampuan yang dimiliki anak cenderung konsep-konsep abstrak dan memiliki sifat yang mirip dengan vectors. Demikian pula dalam domain sosial siswa pada tahap ini dapat menilai kepribadian seseorang dari informasi yang diberikan dan kemudian menggunakan informasi tersebut untuk membuat prediksi tentang perilaku masa depan (Marini & Case, 1994:147-159). Menurut Case perkembangan anak-anak di tahap *vectorial* merupakan efisiensi fungsi penggunaan memori kerja yang menyediakan kemampuan yang lebih besar untuk memproses informasi yang lebih kompleks.

Teori Fischer berbeda dari teori neo-Piaget lainnya pada beberapa hal, antara lain perubahan kognitif dipengaruhi oleh faktor-faktor lingkungan dan sosial, bukan hanya individu. Untuk menjelaskan perubahan perkembangan ia menggabungkan dua teori yaitu teori perkembangan kognitif Piaget dan teori sosial dari Vygotsky, yaitu, internalisasi dan zona pengembangan proksimal (Bjorklund, 2005:107). Internalisasi mengacu pada proses yang memungkinkan anak-anak untuk merekonstruksi dan menyerap produk dari pengamatan dan interaksi mereka dengan caranya mereka sendiri. Potensi kemampuan selalu lebih besar dari kemampuan yang sebenarnya, zona pengembangan proksimal mengacu pada berbagai kemungkinan yang ada antara aktual dan potensial. Tiga tingkatan perkembangan kognitif menurut Fischer (Bjorklund, 2005:107) yaitu:

- 1) *sensori motor* (sekitar 3 bulan -24 bulan),
- 2) *representation* (sekitar 2 tahun-12 tahun), dan
- 3) *abstrak* (sekitar 12 tahun-26 tahun).

Perubahan progresif yang berlangsung terus menerus sepanjang hayat memungkinkan manusia menyesuaikan diri dengan lingkungan di mana manusia hidup. Sikap manusia terhadap perubahan berbeda-beda tergantung beberapa faktor, diantaranya pengalaman pribadi, stereotipe dan nilai-nilai budaya, perubahan peran, serta penampilan dan perilaku seseorang.

4. Perkembangan Perilaku Sosial

Perkembangan sosial dapat diartikan sebagai sequence dari perubahan yang berkesinambungan dalam perilaku individu untuk menjadi makhluk sosial yang dewasa. Secara fitriah manusia dilahirkan sebagai makhluk sosial (*zoon politicon*). Namun untuk mewujudkan potensi tersebut ia harus berada dalam lingkungan untuk berinteraksi dengan manusia lainnya. Charlotte Buhler mengidentifikasi perkembangan sosial ini dalam term kesadaran hubungan aku-engkau atau hubungan subjektif-objektif. Proses perkembangan berlangsung secara bertahap sebagai berikut:

1. Masa kanak-kanak awal (1-3) : subjektif
2. Masa kritis I (3-4) : trotz alter (anak degil)
3. Masa anak-anak akhir (4-6): subyektif menuju objektif
4. Masa anak sekolah (6-12) objektif
5. Masa kritis II (12-13): pre-puber (anak-tanggung)
6. Masa remaja awal (13-16): subjektif menuju objektif
7. Masa remaja akhir (16-18): objektif

D. Aktifitas Pembelajaran

Kegiatan 1

Diskusikan dalam kelompok kecil:

Setiap siswa memiliki karakteristik yang berbeda antara satu dengan yang lain.

Apa saja karakteristik siswa yang dapat Anda cermati?

Jawab:

Kegiatan 2

Diskusikan dalam kelompok kecil:

Berdasarkan tahap perkembangan Piaget, siswa SMA sudah berada pada tahap operasional formal. Apa saja kemampuan matematika yang sudah dapat dikuasai oleh siswa SMA? Bila ada salah satu guru menyajikan matematika dengan pendekatan deduktif formal, bagaimana pendapat anda?

Jawab:

Kegiatan 3

Sebutkan empat tahap perkembangan kognitif menurut Piaget?

Dapatkah Anda memberi contoh implikasi pentahapan perkembangan kognitif menurut Piaget pada pembelajaran matematika?

Jawab:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Tes Formatif 1

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. Berikut adalah kemampuan yang ada pada belahan otak kiri, **kecuali**
 - A. Logis
 - B. Divergen
 - C. Menulis
 - D. Bahasa

2. Berikut adalah kemampuan yang ada pada belahan otak kanan, **kecuali**
 - A. Intuitif
 - B. Acak
 - C. Gambar
 - D. Konvergen

3. Berikut adalah tahapan perkembangan fisik beserta ciri perkembangan setiap tahapan menurut Aristoteles, **kecuali** :
 - A. Masa Dewasa: Ciri-ciri sekunder
 - B. Masa Remaja : Ciri-ciri primer dan sekunder
 - C. Masa anak sekolah: Gejala pubertas
 - D. Masa kanak-kanak: Pergantian gigi

4. Berikut adalah tahap perkembangan kognitif menurut Piaget
 - A. Sensorimotor, concrete operational, preoperational, formal operational.
 - B. Sensorimotor, preoperational, formal operational, vectorical.
 - C. Sensorimotor, preoperational, concrete operational, formal operational.
 - D. Sensorimotor, preoperational, vectorical, formal operational.

5. Berikut adalah tahap perkembangan kognitif menurut J. Bruner
 - A. Symbolic , enactive, econic
 - B. Econic, enactive, symbolic
 - C. Enactive, econic, symbolic
 - D. Enactive, vectorical, symbolic

6. Tahapan perkembangan kognitif siswa SMA menurut Robi Case adalah ...
 - A. Operasional formal
 - B. Symbolic
 - C. Interrelasional
 - D. Vectorical
7. Menurut Piaget perkembangan mental anak terjadi secara
 - A. Bertahap
 - B. Berkesinambungan
 - C. Bertahap dan Berkesinambungan
 - D. Terstruktur dan terarah
8. Menurut tahapan kognitif Piaget, cara berpikir anak yang belum sistematis, belum konsisten, belum logis tetapi sudah mampu memahami realitas di lingkungan dengan menggunakan symbol terjadi pada tahap ...
 - A. Sensosi-motor
 - B. Pre-operasional
 - C. Concrete-operational
 - D. Formal operational
9. Tiga tingkatan perkembangan kognitif menurut Fisher adalah
 - A. Sensori motor, Eonic, Abstrak
 - B. Sensori motor, Representation, dan abstrak
 - C. Eonic, Representation, abstrak
 - D. Representation, econik, dan abstrak
10. Tahapan perkembangan kognitif menurut Case adalah....
 - A. *Dimensional, sensorimotor, interrelational, dan vectorial*
 - B. *Sensorimotor, interrelational, dimensional, dan vectorial*
 - C. *Dimensional, sensorimotor, vectorial, dan interrelational*
 - D. *Sensorimotor, dimensional, , interrelational, dan vectorial*

F. Rangkuman

Perkembangan perilaku dan pribadi sangat kompleks, oleh sebab itu beberapa ahli mencoba mengembangkan model pentahapan (stage) dari proses perkembangan yang dihasilkan melalui longitudinal maupun cross section.

1. Tahapan perkembangan fisik menurut Aristotes
 - 1) Masa kanak-kanak (0-7) : Ciri-ciri Pergantian gigi
 - 2) Masa anak sekolah (7-14): Ciri-ciri Gejala pubertas
 - 3) Masa Remaja (14-21) : Ciri-ciri primer dan sekunder
2. Tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget
 - 1) Sensorimotor (0-2).
 - 2) Preoperational (2-7).
 - 3) Concrete operational (7-12).
 - 4) Formal operational (12-dewasa).
3. Tahapan perkembangan kognitif menurut J.Bruner adalah
 - 1) Enactive stage,
 - 2) Iconic stage,
 - 3) Symbolic stage,
4. Tahapan perkembangan kognitif menurut Case adalah:
 - 1) sensorimotor (0-1,5 tahun),
 - 2) *interrelational* (1,5-5 tahun),
 - 3) *dimensional* (5-11 tahun), dan
 - 4) *vectorial* (11-19 tahun)
5. Tiga tingkatan perkembangan kognitif menurut Fisher adalah:
 - 1) Sensori motor (sekitar 3 bulan -24 bulan),
 - 2) Representation (sekitar 2 tahun-12 tahun),
 - 3) Abstrak (sekitar 12 tahun-26 tahun)

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat pada bagian akhir unit ini. Hitunglah ketepatan jawaban tersebut dengan cara memberi skor masing-masing soal dengan rentangan 0-10. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam mempelajari subunit 1 ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan: } \frac{\text{Jumlah skor kelima jawaban}}{50} \times 100 \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	Kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Unit berikutnya. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam subunit sebelumnya, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

Kegiatan Belajar 2

Keragaman Dalam Kemampuan Dan Kepribadian Peserta Didik

A. Tujuan

Secara umum tujuan yang dicapai setelah peserta diklat mempelajari kegiatan belajar-2 ini adalah memahami keragaman dalam kemampuan dan kepribadian peserta didik khususnya peserta didik pada level SMA. Pemahaman Menguasai karakteristik peserta didik dari. Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah setelah mempelajari Kegiatan Belajar-2 peserta diklat dapat :

1. Menjelaskan keragaman fisik individu
2. Menjelaskan inteligensi individu
3. Menjelaskan tipe inteligensi Sternberg
4. Menjelaskan structural intelektual Guilford
5. Menjelaskan inteligensi jamak individu
6. Menjelaskan gaya belajar peserta didik

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menjelaskan keragaman fisik individu
2. Menjelaskan inteligensi individu
3. Menjelaskan tipe inteligensi Sternberg
4. Menjelaskan mosel structural intelektual Guilford
5. Menjelaskan inteligensi jamak individu
6. Menjelaskan gaya belajar peserta didik

C. Uraian Materi

Peserta didik merupakan salah satu komponen utama dalam proses belajar mengajar. Peserta didik sebagai individu, masing-masing memiliki perbedaan dan keunikan individu (*individual differences*). Guru perlu mempertimbangkan perbedaan dan keunikan individu pada proses belajar mengajar. Pada sisi lain terdapat perbedaan keragaman yang melekat pada kelompok tertentu. Siswa

mempunyai latar belakang keluarga yang bervariasi. Ada beberapa sumber variasi yang cukup berperan besar yaitu etnis-budaya-bahasa-agama, dan status sosial ekonomi. Kebhinekaan Indonesia tak dapat disangkal lagi. Selalu ada kemungkinan pertemuan antar etnis di ruang kelas. Etnis budaya membawa kemajemukan tata perilaku akibat pengaruh dari kebudayaan. Status sosial ekonomi orang tua ditinjau dari penghasilan, pekerjaan, dan latar belakang pendidikan. Berdasarkan hal tersebut pengelompokan siswa dapat ditinjau dari aspek jenis kelamin, jasmaniah, status sosial ekonomi, etnis-ras, budaya, perilaku, gaya belajar, dan lain-lain.

Begitu banyak keragaman dan keunikan peserta didik, namun efektifitas utama tentang keberagaman yang perlu dipertimbangkan guru kelas adalah kemampuan siswa, talenta, dan gaya belajar.

1) Intelligence

Teori tradisional menyatakan bahwa individu memiliki kemampuan mental seperti yang diukur oleh kinerja pada tugas kognitif tertentu. Abad kedua puluh Alfred Binet di Perancis dan Lewis Terman di Amerika mengembangkan tes pertama untuk mengukur inteligensi/kecerdasan manusia sebagai kemampuan tunggal. Dari hasil kerja Binet muncul ide tentang umur mental. Seorang anak yang dapat melewati sejumlah pertanyaan tes yang sama seperti yang dilewati oleh anak-anak lain di kelompoknya akan memiliki umur mental kelompok umur itu. Berikutnya diperkenalkan konsep intelligence quotient (IQ), yaitu komputasi umur mental seseorang yang dibagi dengan umur kronologisnya dan dikalikan dengan 100.

$$\text{Intelligence quotient (IQ)} = \frac{\text{Umur mental}}{\text{Umur kronologis}} \times 100$$

Setelah lebih dari dua dekade terakhir, beberapa psikologi kontemporer seperti Howard Gardner (1983, 1999, 2002) dan Sternberg (1985, 1999) telah menentang ide inteligensi umum atau tunggal. Sternberg berpendapat ada tiga tipe inteligensi yaitu:

1. Inteligensi analitis, melibatkan proses kognitif individu.

2. Inteligensi kreatif adalah insight individu untuk menghadapi berbagai pengalaman baru
3. Inteligensi praktis adalah kemampuan individu untuk beradaptasi dan membentuk-ulang lingkungan.

Di beberapa kasus, perilaku yang cerdas menuntut orang untuk menyeleksi lingkungan yang kondusif bagi kesuksesan individual. Ide ini membantu memberi penjelasan mengapa seorang siswa tertentu berhasil di sekolah tertentu dan gagal di sekolah yang lain.

Guilford (dalam Sternberg, 1997) memperkenalkan model struktur intelektual yang membedakan cara bekerjanya (operasi) pikiran menjadi dua tipe berpikir konvergen (*convergent thinking*) dan berpikir divergen (*divergent thinking*). Individu yang berpikir secara konvergen berarti berpikir mengerucut, sehingga umumnya berpandangan bahwa penyelesaian diperoleh melalui cara berpikir prosedural atau struktural. Sementara itu, berpikir divergen berarti membuka pikiran untuk berbagai kemungkinan termasuk

Tokoh teoritis kontemporer paling terkenal adalah Howard Gardner dengan teori inteligensi sebagai suatu kemampuan lebih dari tunggal atau dengan kata lain inteligensi jamak. Teori Gardner tentang inteligensi jamak (*multiple intelligence*) menyebutkan adanya delapan macam inteligensi yang terpisah: *linguistic, logical-mathematical, spatial, musical, bodily-kinesthetic, interpersonal, intrapersonal, dan naturalist*.



Gambar 3. Delapan Tipe Intelligency

Deskripsi dari masing masing kemampuan disajikan dalam tabel berikut.

Table 1. Delapan Tipe Intelligensi Howard Gardner

Tipe	Deskripsi
<i>Logical-mathematic</i>	Kemampuan untuk memberi tanda perbedaan di antara pola logis dan numeric, dan untuk mengelola rantai penalaran yang panjang
<i>Linguistic</i>	Kepekaan terhadap bunyi, ritme, dan makna kata-kata dan berbagai fungsi bahasa yang berbeda
<i>Musical</i>	Kemampuan untuk menghasilkan dan mengapresiasi pitch, timbre, ritme, dan berbagai bentuk ekspresi musical
<i>Spatial</i>	Kemampuan untuk mempersepsi dunia visual-spatial secara akurat dan untuk melakukan transformasi pada persepsinya, baik secara mental maupun di dunia nyata.
<i>Bodily-kinesthetic</i>	Kemampuan untuk mengontrol berbagai gerakan fisik dan untuk menangani berbagai benda secara terampil
<i>Interpersonal</i>	Kapasitas untuk melihat perbedaan dan merespon dengan tepat berbagai macam suasana-perasaan, temperamen, motivasi, dan keinginan orang lain
<i>Intrapersonal</i>	Pemahaman tentang keadaan emosionalnya sendiri dan pengetahuan tentang kekuatan dan kelemahan sendiri
<i>Naturalist</i>	Kemampuan untuk mendiskriminasikan berbagai benda hidup dan kepekaan terhadap fitur-fitur alam

Konsep kecerdasan majemuk di atas dapat digunakan oleh guru untuk memahami kecenderungan siswa dalam belajar. Selanjutnya guru dapat mengubah atau memodifikasi metode pembelajaran berdasarkan ragam kecerdasan siswa. Guru pun dapat mendorong siswa mengenali kecenderungan kecerdasannya, dan mengajarkan mereka untuk menggunakan gaya belajar yang sesuai.

Aktivitas yang menunjukkan kecerdasan spasial antara lain menata objek yang ada di lingkungan, menyelesaikan jigsaw atau puzzle, dan merakit mesin benda yang kompleks misalnya sepeda, robot, dan sebagainya. Aktivitas yang menggambarkan kemampuan linguistik antara lain persuasi verbal dan menulis paper dengan sangat terampil.

Aktivitas yang menunjukkan kecerdasan intrapersonal adalah memperhatikan perasaan yang bercampur aduk dalam diri seseorang dan menandai motif yang sebenarnya dari dalam diri seseorang. Aktivitas yang terkait adalah menyanyi, memainkan instrumen musik, dan menciptakan komposisi nada. Aktivitas yang terkait dengan kecerdasan naturalis adalah menandai contoh spesies tanaman atau binatang, memperhatikan hubungan antar spesies, dan proses-proses alamiah di dalam lingkungan.

2) Gaya Belajar

Gaya belajar adalah cara yang cenderung terus-menerus dipakai siswa dalam mempelajari suatu materi pelajaran. Perbedaan gaya belajar siswa dipengaruhi oleh cara berpikir yang biasanya dipakai atau sering diistilahkan sebagai gaya kognitif. Menurut Zhang dan Sternberg (dalam Seifert & Sutton, 2009) gaya kognitif adalah cara yang terus-menerus digunakan siswa dalam mempersepsi, mengingat, memecahkan masalah, dan membuat keputusan.

Witkin (dalam Seifert & Sutton, 2009) merupakan tokoh yang memperkenalkan konsep gaya kognitif. Ia membagi kecenderungan berpikir menjadi dua bentuk gaya kognitif yaitu bebas dari konteks (*field independence* atau FID) dan terikat dengan konteks (*field dependence* atau FD). Kecenderungan berpikir dengan gaya FID ditinjau dari sejauhmana seseorang berpikir karena stimulus internal. Gaya berpikir FD cenderung dipengaruhi oleh stimulus

eksternal. Siswa dengan FD lebih suka belajar dalam kelompok. Sementara itu, siswa FID lebih menyukai belajar sendiri.

Gaya belajar juga dipengaruhi oleh modalitas perseptual yaitu reaksi khas individual dalam mengadopsi data secara efisien yang dipengaruhi oleh faktor biologis, dan lingkungan fisik. Ada empat gaya belajar ditinjau dari modalitas perseptual:

a. *Visual learners are learning through seeing.*

Siswa dengan gaya ini membutuhkan melihat langsung bahasa tubuh guru, ekspresi wajah, untuk dapat memahami sepenuhnya isi pelajaran. Mereka cenderung duduk di deretan depan untuk menghindari penghalang pandangan mata (misalnya kepala teman-temannya). Mereka cenderung berpikir dalam bentuk piktorial dan mempelajari sesuatu paling efektif dari tampilan visual seperti diagram, buku yang berilustrasi, transparensi (*slides*), video, flipcharts, dan *handouts*. Selama pelajaran dilakukan diskusi kelas berlangsung, mereka lebih suka mencatat untuk menyerap informasi.

b. *Auditory learners are learning through listening.*

Mereka paling mudah menangkap informasi melalui pembicaraan, ceramah, diskusi, mengungkapkan sesuatu, dan mendengar apa yang orang lain katakan. Siswa dengan modalitas auditori menginter-pretasi (menafsirkan) arti pembicaraan dengan mendengarkan suara, nada, kecepatan, dan intonasi. Informasi tertulis hanya sedikit berpengaruh, tetapi akan sangat berpengaruh jika dibacakan atau dijelaskan. Siswa seperti ini sangat terbantu dengan metode membaca keras (*reading aloud*) dan menyetel tape recorder. Mereka senang jika berpartisipasi dalam diskusi kelompok. Mereka belajar dengan baik melalui ceramah verbal, diskusi, berbicara hal-hal melalui dan mendengarkan apa yang dikatakan orang lain. Mereka berhasil dalam ujian lisan. Bagi pelajar auditori, informasi tertulis mungkin memiliki sedikit arti sampai hal itu terdengar di telingga mereka. Pelajar auditori menafsirkan makna yang mendasari mereka bicara melalui mendengarkan nada suara, pitch, kecepatan dan nuansa lain.

c. *kinesthetic learners are learning by moving, doing, and touching.*

Siswa dengan modalitas perasa, peraba, dan kinestetik paling efektif menyerap informasi melalui menyentuh dengan tangan, merasakan melalui indera pencicip, mencium aroma, melakukan gerakan-gerakan, unjuk kerja, dan aktif mengeksplorasi lingkungan. Mereka kesulitan jika harus duduk berlama-lama dan mudah pecah konsentrasinya karena keinginan untuk aktif bergerak dan mengeksplorasi. Pada bagian ini, modalitasnya juga dikenal dengan sebutan kinestetik, olfaktori (penciuman), dan gustatif (perasa).

Pemrosesan informasi di otak terjadi dengan cara berbeda dalam aktivitas merasakan, memikirkan, memecahkan masalah, dan mengingat informasi. Masing-masing individu lebih menyukai cara tertentu, yang dipakai terus-menerus, cara mempersepsi, mengorganisir, dan memelihara informasi. Misalnya, belajar melalui workshop, praktikum, atau metode informal lainnya mungkin lebih cocok bagi orang tertentu. Kadangkala, orang merasa kurang bisa menyerap pelajaran, padahal masalahnya bukan karena kesulitan memahami pelajaran namun karena ia kurang mengenali gaya belajarnya yang paling sesuai untuk dirinya sendiri.

Selain modalitas perseptual, kepribadian seseorang juga mempengaruhi cara belajarnya. Aspek-aspek kepribadian yang perlu diperhatikan terkait dengan gaya belajar adalah bagaimana fokus atau perhatian, kondisi emosionalitas, dan nilai-nilai yang diyakini siswa. Dengan memahami ketiga aspek kepribadian ini, maka kita dapat memprediksi bagaimana reaksi dan apa yang dirasakan siswa terhadap situasi yang berbeda-beda.

Fokus atau perhatian siswa dapat dipahami sebagai minat (*interest*). Masing-masing siswa memiliki ragam minat dan derajat yang berbeda-beda dalam berbagai bidang. Ruang lingkup minat fokus atau perhatian adalah segala sesuatu yang dapat menarik minat siswa. Pada masa sekarang ini, apa saja bisa menjadi hobi (kesukaan) anak baik berupa kesenangan terhadap suatu aktivitas, benda, atau situasi. Ada siswa yang sangat tertarik dengan membaca komik, bermain games, berolah raga, musik, tari, modeling, film, belanja, membaca buku, otak-atik komputer, otak-atik mesin, berjualan, memasak, menjahit, desain, dan sebagainya. Seorang guru perlu memahami apa saja minat atau hobi siswa. Pemahaman ini dapat digunakan untuk menata kegiatan kelas, ekstrakurikuler,

dan strategi belajar yang tepat untuk siswa. Misalnya saja pelajaran menghafal surat-surat pendek dapat dilakukan dengan strategi merekam suara atau memfilmkan penampilan setiap anak. Jadi dengan mendekatkan antara beragam minat siswa dengan materi pelajaran, maka ketertarikan terhadap aktivitas yang disukai tersebut dapat digeneralisir siswa sebagai ketertarikan pada pelajaran sekolah.

3) Emosional

Emosionalitas siswa merupakan bagian penting yang perlu dikenali guru, sebab aktivitas berpikir seseorang tidak terpisah dari emosi. Setidaknya ada dua unsur emosionalitas yang perlu diperhatikan yaitu mood (suasana hati) dan emosionalitas secara umum. Suasana hati adalah kondisi emosionalitas yang dapat berubah sewaktu-waktu. Suasana hati bersifat temporer atau sementara. Misalnya saat udara panas, belum sarapan, dan tugas sekolah banyak yang harus dikerjakan, maka suasana hati para siswa cenderung negatif.

Sementara emosionalitas secara umum merujuk pada emosi siswa yang diekspresikan secara lebih persisten. Ada siswa yang lebih menyimpan perasaan, tenang, hati-hati, dan pendiam (*reserved*). Ada pula yang lebih ekspresif atau spontan (*loose or movable*). Dengan kemampuan memahami minat siswa, kita bisa memancing siswa yang pendiam menjadi lebih aktif dalam aktivitas belajar. Apabila guru mengetahui minat siswa yang ekspresif, maka mereka dapat lebih berkonsentrasi belajar. Untuk itu guru perlu berlatih memperhatikan suasana hati dan kecenderungan emosionalitas siswa.

Goleman menyebutkan adanya lima wilayah kecerdasan pribadi dalam bentuk kecerdasan emosional, yaitu: (1) Kemampuan mengenali emosi diri. (2) Kemampuan mengelola emosi. (3) Kemampuan memotivasi diri. (4) Kemampuan mengenali emosi orang lain. (5) Kemampuan membina hubungan. Di sini dapat kita simpulkan betapa pentingnya kecerdasan emosional dikembangkan pada diri anak. Karena betapa banyak kita jumpai anak-anak, di mana mereka begitu cerdas di sekolah, begitu cemerlang prestasi akademiknya, namun bila tidak dapat mengelola emosinya, seperti mudah marah, mudah putus asa atau angkuh dan sombong, maka prestasi tersebut tidak akan banyak

bermanfaat untuk dirinya. Ternyata kecerdasan emosional perlu lebih dihargai dan dikembangkan pada anak sejak usia dini. Karena hal inilah yang mendasari ketrampilan seseorang di tengah masyarakat kelak, sehingga akan membuat seluruh potensinya dapat berkembang secara lebih optimal.

Seto Mulyadi (2002a) menyatakan tentang Robert Coles yang menggagas tentang kecerdasan moral yang juga memegang peranan amat penting bagi kesuksesan seseorang dalam hidupnya. Hal ini ditandai dengan kemampuan seorang anak untuk bisa menghargai dirinya sendiri maupun diri orang lain, memahami perasaan terdalam orang-orang di sekelilingnya, mengikuti aturan-aturan yang berlaku, semua ini termasuk merupakan kunci keberhasilan bagi seorang anak di masa depan. Suasana damai dan penuh kasih sayang dalam keluarga, contoh-contoh nyata berupa sikap saling menghargai satu sama lain, ketekunan dan keuletan menghadapi kesulitan, sikap disiplin dan penuh semangat, tidak mudah putus asa, lebih banyak tersenyum daripada cemberut, semua ini memungkinkan anak mengembangkan kemampuan yang berhubungan dengan kecerdasan kognitif, kecerdasan emosional maupun kecerdasan moralnya. Demikianlah gambaran selintas tentang ketiga kecerdasan tersebut.

Pada akhirnya, dapatlah dinyatakan di sini bahwa setiap Guru Matematika di samping mengajar para siswanya, juga harus melatih dan mendidik. Mengajar akan berkait dengan kemampuan otak dan pengetahuan, melatih akan berkait dengan kemampuan raga dan keterampilan, sedangkan mendidik akan berkait dengan kemampuan hati atau jiwa dan nilai-nilai.

Nilai atau *value* adalah sesuatu yang dianggap penting atau berharga bagi seseorang. Dalam filsafat dikenal ada tiga jenis tolok ukur nilai yaitu logika, moral, dan estetika. Nilai logika hanya mengenal benar atau salah ditinjau dari penalaran. Nilai moral menimbang baik atau buruknya sesuatu bagi kepentingan diri dan masyarakat. Sementara estetika menekankan indah atau tidaknya sesuatu. Keyakinan terhadap suatu nilai tertentu dipengaruhi oleh adat istiadat dan religiusitas seseorang. Seseorang yang tinggal dalam komunitas yang menjunjung tinggi adat istiadat ataupun menjunjung tinggi keyakinan agama, maka akan cenderung mengadopsi nilai-nilai moral yang lebih kuat. Tindak-tanduknya cenderung merujuk pada petunjuk adat atau ajaran agama yang

diyakini. Singkatnya apa yang dianggap oleh seseorang sebagai hal yang penting akan berpengaruh terhadap bagaimana merespon termasuk dalam gaya belajarnya.

Peran guru adalah mengenali apa nilai yang dipandang paling penting bagi siswa dan menggunakannya untuk memperlancar kegiatan pembelajaran. Lebih bagus lagi apabila guru mampu mengungkapkan nilai apa yang dapat diambil dari setiap pelajaran yang diberikan bagi siswa.

Untuk mengenali kepribadian siswa, guru perlu mengamati, bergaul, dan bertanya pada mereka. Catatan penting dalam aspek ini adalah guru semestinya mau menerima, mendengar, dan menghargai apa yang menjadi minat, hal yang dirasakan, dan apa yang dipandang penting oleh para siswa.

4) Anak Berbakat

Siswa-siswa yang berbakat dan bertalenta dapat memiliki banyak karakteristik, terutama jika kita menerima konsep inteligensi jamak. Turnbull (2010) menyusun karakteristik ini menjadi lima kategori untuk memberikan petunjuk kepada para guru mengenai apa yang harus diamati dalam mengidentifikasi siswa-siswa berbakat yang mungkin ada di kelas-kelas mereka:

- Nilai inteligensi umum yang dinyatakan dengan IQ memiliki nilai di atas rata-rata, dapat menangkap konsep kompleks dan abstrak dengan cepat. Kosakata yang dimiliki lebih maju, bertanya banyak pertanyaan, dan mendekati masalah dengan cara-cara yang unik dan kreatif.
- Memiliki informasi dan keterampilan dalam hal akademik tertentu mendahului teman-temannya. Memperoleh pemahaman lanjutan dalam penalaran matematika, inquiri ilmiah.
- Memiliki pemikiran produktif kreatif. Kualitas ini ditunjukkan melalui ciri-ciri intuitif, berwawasan, ingin tahu, dan fleksibel.
- Menunjukkan kemampuan interpersonal dan intrapersonal melalui kemampuan memotivasi dan memimpin orang lain.
- Beberapa siswa berbakat memiliki talenta seni, visual, fisik, atau peran.

Menghadapi siswa berbakat dapat dilakukan dengan beberapa hal, misalnya bila berada pada kelas reguler, guru dapat memberikan materi

pengayaan. Bila dilakukan pada level sekolah siswa berbakat dapat dibentuk kelas akselesari yang lebih dikenal dengan kelas CI (cerdas istimewa). Hal ini dilakukan agar siswa tidak merasa bosan karena harus mengikuti level pembelajarannya yang sama dengan teman-temannya dengan kemampuan rata-rata.

5) Gender

Kebanyakan studi tidak menemukan perbedaan besar yang melekat pada anak laki-laki dan anak perempuan dalam hal kemampuan kognitif secara umum (Halpen dan LaMay, 2000). Akan tetapi Diane Halpen (1996) meraih kesimpulan yang sedikit berbeda dan menyatakan memang ada sedikit perbedaan. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa perempuan menunjukkan kinerja yang lebih baik di bidang seni, bahasa, pemahaman bacaan, dan komunikasi tertulis dan lisan, sementara anak laki-laki tampak sedikit lebih unggul di bidang matematika dan penalaran matematika.

Sebagian yang lain menyatakan bahwa perbedaan gender dalam kaitannya dengan kognisi dan prestasi mungkin bersifat situasional. Perbedaan itu bervariasi menurut waktu dan tempat dan mungkin berinteraksi dengan ras dan kelas sosial. Ormord (2000) merangkum penelitian selama 30 tahun terakhir tentang perbedaan gender dan implikasinya pada pendidikan.

Table 2. Perbedaan Gender dan Implikasinya

Fitur	Perbedaan/Persamaan	Implikasi Untuk Pendidikan
Kemampuan kognitif	Anak laki-laki dan anak perempuan tampaknya memiliki kemampuan kognitif yang hampir sama. Anak perempuan sedikit lebih baik dalam tugas-tugas verbal, anak laki-laki memiliki keterampilan visual-spasial yang sedikit lebih baik. Perbedaan prestasi di subjek-subjek tertentu kecil dan semakin kecil perbedaannya pada tahun-tahun terakhir.	Mengharapkan
Aktivitas fisik dan keterampilan motorik	Sebelum pubertas anak laki-laki memiliki keunggulan seperti lebih tinggi berotot dan mereka cenderung untuk lebih mengembangkan fisik mereka jika dibandingkan dengan anak perempuan. Anak laki-laki cenderung dianggap lebih aktif dibanding anak perempuan.	Mengasumsikan bahwa kedua gender memiliki potensi untuk mengembangkan berbagai keterampilan fisik dan motorik.
Motivasi	Anak perempuan pada umumnya lebih peduli dengan nilai-nilainya. Mereka cenderung bekerja lebih keras, tetapi sedikit mengambil resiko	Mengharapkan semua gender unggul di semua mata pelajaran. Menghindari stereotip
Cita-cita Berkarier	Anak perempuan cenderung untuk melihat diri mereka sendiri sebagai ikatan pendidikan lebih dari pada anak laki-laki. Anak laki-laki memiliki pengharapan jangka panjang di area maskulin secara stereotip. Anak perempuan cenderung memiliki karier yang tidak akan mengganggu masa depan mereka sebagai istri dan orang tua	Membuka kesempatan bagi seluruh siswa untuk menjadi contoh laki-laki dan perempuan yang menjadi sukses. Mendorong anak laki-laki untuk bercita-cita pergi sekolah dan menunjukkan pada anak perempuan orang-orang yang berhasil di bidang karier dan sekeluarga
Hubungan Interpersonal	Anak laki-laki cenderung untuk memamerkan serangan fisik secara lebih, anak perempuan cenderung untuk lebih afiliatif. Anak laki-laki lebih menyukai situasi persaingan; anak perempuan lebih menyukai lingkungan yang kooperatif	Mengajarkan pada kedua gender cara yang lebih tidak agresif untuk berinteraksi dan menyediakan sebuah lingkungan yang kooperatif bagi semua

D. Aktivitas PembelajaranKegiatan 1

Identifikasi perbedaan dan kesamaan kebiasaan dan kemampuan yang dimiliki siswa dan siswi di kelas anda. Bagaimana memanfaatkan hasil identifikasi untuk pembelajaran matematika?

Jawab:

Kegiatan 2

Anda ditugaskan untuk mengajar matematika di kelas khusus olah raga. Tuliskan dugaan sementara terkait gaya belajar siswa-siswa di kelas tersebut. Buatlah rencana kegiatan pembelajaran matematika untuk kelas khusus olah raga tersebut.

Jawab:

Kegiatan 3

Gaya belajar siswa di suatu kelas berbeda-beda, ada pelajar dengan gaya belajar *auditory*, ada pelajar dengan gaya belajar kinestetik dan ada pelajar dengan gaya belajar visual. Bagaimana anda menyiapkan perangkat pembelajaran untuk mengatasi keberagaman ini?

Jawab:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Tugas

Gaya belajar siswa di suatu kelas berbeda-beda, ada pelajar dengan gaya belajar *auditory*, ada pelajar dengan gaya belajar kinestetik dan ada pelajar dengan gaya belajar visual.

- a. Pilih satu topic tertentu, rencanakan pembelajaran matematika pada kelas yang umumnya memiliki gaya belajar *auditory*.
- b. Pilih satu topic tertentu, rencanakan pembelajaran matematika pada kelas yang umumnya memiliki gaya belajar visual.

Formatif 2

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. Intelligence quotient (IQ) adalah ...
 - A. umur mental seseorang yang dibagi dengan umur kronologisnya dan dikalikan dengan 100
 - B. hasil tes kemampuan individu menggunakan TPA

- C. umur mental seorang yang dikalikan dengan umur kronologis
 - D. umur mental diukur dengan tes kemampuan TPA yang dikali dengan 100
2. Tokoh pencetus gagasan inteligensi jamak adalah
- A. Guilford
 - B. H. Gardner
 - C. J. Bruner
 - D. Within
3. Menurut teori inteleginsi jamak kemampuan untuk memberi tanda perbedaan di antara pola logis dan numeric, dan untuk mengelola rantai penalaran yang panjang adalah kemampuan...
- A. Spatial
 - B. Logical- mathematic
 - C. Naturalist
 - D. Interpersonal
4. Berikut adalah salah satu gaya belajar ditinjau dari modalitas perceptual, **kecuali**:
- A. *visual learners*
 - B. *auditory learners*
 - C. *musical learners*
 - D. *actile or kinesthetic*
5. Berikut adalah tipe inteligensi menurut Sternberg, **kecuali**
- A. Inteligensi analitis
 - B. Inteligensi logis
 - C. Inteligensi kreatif
 - D. Inteligensi praktis
6. Menurut Sternberg kemampuan insignht individu untuk menghadapi berbagai pengalaman baru, adalah ...
- A. Inteligensi analitis
 - B. Inteligensi logis
 - C. Inteligensi kreatif
 - D. Inteligensi praktis

7. Tokoh yang memperkenalkan konsep gaya kognitif *field independence* dan *field dependence* adalah
 - A. Guilford
 - B. Witkin
 - C. Sternberg
 - D. Gardner
8. Model struktural intelektual yang diajukan Guilford adalah sebagai berikut:
 - A. *Logical* dan *spatial*
 - B. *convergent* dan *divergent*
 - C. *interpersonal* dan *intrapersonal*
 - D. inteligen dan multiple intelegen
9. Menurut teori inteleginsi jamak, kepekaan terhadap bunyi, ritme, dan makna kata-kata dan berbagai fungsi bahasa yang berbeda adalah kemampuan
 - A. Spatial
 - B. Naturalis
 - C. Bahasa
 - D. Interpersonal
10. Berikut adalah cirri dari siswa berbakat, **kecuali**
 - A. Memiliki nilai IQ di atas rata-rata
 - B. Memiliki sedikit informasi dalam hal akademik, namun tetap memiliki akademik yang baik.
 - C. Memiliki pemikiran produktif kreatif. Kualitas ini ditunjukkan melalui cirri-ciri intuitif, berwawasan, ingin tahu, dan fleksibel.
 - D. Menunjukkan kemampuan interpersonal dan intrapersonal melalui kemampuan memotivasi dan memimpin orang lain.

F. Rangkuman

1. Setiap individu memiliki keunikan dengan latar sosial budaya yang bervariasi, yang akan membawa perbedaan keragaman yang melekat pada kelompok tertentu.
2. Teori tradisional menyatakan bahwa inteligensi/kecerdasan manusia sebagai kemampuan tunggal. Alfred Binet di Perancis dan Lewis Terman di Amerika mengembangkan tes pertama untuk mengukur inteligensi yang dikenal dengan intelligence quotient (IQ).
3. Tokoh teoritis kontemporer paling terkenal adalah Howard Garnerd dengan teori inteligensi sebagai suatu kemampuan lebih dari tunggal atau dengan kata lain inteligensi jamak. Teori Garnerd tentang inteligensi jamak (*multiple intelligence*) menyebutkan adanya delapan macam inteligensi yang terpisah: *linguistic, logical-mathematical, spatial, musical, bodily-kinesthetic, interpersonal, intrapersonal, dan naturalist*.
4. Gaya belajar adalah cara yang cenderung terus-menerus dipakai siswa dalam mempelajari suatu materi pelajaran.
5. Guilford memperkenalkan model struktur intelektual yang membedakan cara bekerjanya (operasi) pikiran menjadi dua tipe berpikir konvergen (*convergent thinking*) dan berpikir divergen (*divergent thinking*).
6. Witkin merupakan tokoh yang memperkenalkan konsep gaya kognitif. Ia membagi kecenderungan berpikir menjadi dua bentuk gaya kognitif yaitu bebas dari konteks (*field independence* atau FID) dan terikat dengan konteks (*field dependence* atau FD).
7. Empat gaya belajar ditinjau dari modalitas perseptual: *visual learners are learning through seeing; auditory learners are learning through listenin; actile or kinesthetic learners are learning by moving, doing, and touching*.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat pada bagian akhir unit ini. Hitunglah ketepatan jawaban tersebut dengan cara memberi skor masing-masing soal dengan rentangan 0-10. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam mempelajari Kegiatan Belajar 2 ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan: } \frac{\text{Jumlah skor kelima jawaban}}{50} \times 100 \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Unit berikutnya. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam subunit sebelumnya, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN

Kunci Jawaban Kegiatan Belajar 1

1. B
2. D
3. A
4. C
5. C
6. D
7. C
8. B
9. B
10. B

Kunci Jawaban Kegiatan Belajar 2

1. A
2. B
3. B
4. C
5. B
6. C
7. B
8. B
9. C
10. B

Evaluasi

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. Tahapan perkembangan kognitif siswa SMA menurut Fisher adalah ...
 - A. Sensori motor
 - B. Representation
 - C. Abstrak
 - D. Vectorical

2. Menurut teori inteleginsi jamak kemampuan untuk memberi tanda perbedaan di antara pola logis dan numeric, dan untuk mengelola rantai penalaran yang panjang adalah kemampuan...
 - A. Spatial
 - B. Logical- mathematic
 - C. Naturalist
 - D. Interpersonal

3. Siswa-siswi SMA BMW sering menyanyikan lagu untuk mengingat di kuadran mana fungsi $f(x) = \sin x$ bernilai positif. Gaya belajar yang digunakan oleh siswa-siswi SMA BMW adalah
 - A. Auditori
 - B. Musikal
 - C. Visual
 - D. kinestetik

4. Siswa-siswi SMA Bhawara lebih mudah memahami materi penyajian data dengan menggunakan histogram atau grafik. Gaya belajar yang digunakan oleh siswa-siswi SMA Bhawara adalah
 - A. Kinestetik
 - B. Spasial

- C. Visual
 - D. Auditori
5. Siswa-siswi SMA Teladan sering menggunakan percobaan yang melibatkan aktivitas fisik untuk memahami materi permutasi dan kombinasi. Gaya belajar yang digunakan siswa-siswi SMA Teladan adalah
- A. Auditori
 - B. Kinestetik
 - C. Visual
 - D. Logikal

Kunci jawaban evaluasi:

- 1. C
- 2. B
- 3. A
- 4. C
- 5. B

Penutup

Submodul ini dimulai dengan pembahasan mengenai karakteristik perkembangan peserta didik, karena dengan mengetahui karakteristik perkembangan peserta didik khususnya perkembangan kognitif peserta didik dapat mempermudah bapak/ibu guru mempersiapkan materi ajar matematika yang mudah dipahami oleh peserta didik. Selanjutnya dibahas pula perbedaan keragaman peserta didik. Ada beberapa sumber variasi yang cukup berperan besar yaitu etnis-budaya-bahasa-agama, dan status sosial ekonomi. Kebhinekaan Indonesia tak dapat disangkal lagi. Selalu ada kemungkinan pertemuan antar etnis di ruang kelas. Etnis budaya membawa kemajemukan tata perilaku akibat pengaruh dari kebudayaan. Status sosial ekonomi orang tua ditinjau dari penghasilan, pekerjaan, dan latar belakang pendidikan. Berdasarkan hal tersebut pengelompokkan siswa dapat ditinjau dari aspek jenis kelamin, jasmaniah, status sosial ekonomi, etnis-ras, budaya, perilaku, gaya belajar, dan lain-lain.

Pada akhirnya, mudah-mudahan modul ini dapat memberi masukan kepada Bapak/ibu guru untuk dapat mengembangkan kompetensinya khususnya pemahaman terkait dengan karakteristik peserta didik dan keberagaman peserta didik, disamping guru juga harus secara aktif berupaya mencari kegiatan untuk pengembangan dirinya sebagai guru pembelajar. Dengan tersedianya bahan ini akan membantu bapak/ibu guru untuk meningkatkan kompetensinya yang akan terlihat pada peningkatan nilai UKG.

Penutup

Daftar Pustaka

- Arends, R.I. 2008. Learning to teach. Terjemahan. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Bjorklund, D.F. (2005). Children's Thinking. Belmont, CA: Wadsworth Thomson Learning.
- Hamilton, R. and Ghatala, E. 1997. Learning and Instruction. New York: McGraw-Hill, Inc
- Hurlock, E. (1996). Psikologi Perkembangan. Edisi Kelima. (Terjemahan). Jakarta: Erlangga.
- Hilgard, Ernest Ropiequet. 1975. *Theories Of Learning: The Century Psychologi Series*. Printice-Hall. Inc., and Englewood Cliffs, N.J
- <http://www.lifecircles-inc.com/Learningtheories/behaviorism/Skinner.html>
- Seto Mulyadi (2002a). Menjadikan Anak Yang Terbaik Menuju Milenium III. Makalah Disampaikan dalarn Seminar yang diselenggarakan oleh RS. Mitra Keluarga Bekasi

Glosarium

Intelligence quotient (IQ)	: Komputasi umur mental seseorang yang dibagi dengan umur kronologisnya dan dikalikan dengan 100
Multiple inteligensi	: inteligensi/kecerdasan jamak meliputi delapan macam inteligensi yang terpisah: <i>linguis-tic, logical-mathematical, spatial, musical, bodily-kinesthetic, interpersonal, intraperso-nal, dan naturalist</i> .
Gaya belajar	: cara yang cenderung terus-menerus dipakai siswa dalam mempelajari suatu materi pelajaran.



GURU PEMBELAJAR

MODUL PELATIHAN MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI A PROFESIONAL

BILANGAN, NOTASI SIGMA, BARISAN DAN DERET

**DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016**

Penulis:

1. Emut., 081329047787, wawanghj@gmail.com
2. Wiworo, S.Si,MM., 08562875885, percussionline@yahoo.com

Penelaah:

1. Drs. Markaban, M.SI., 081328759138, mar_kaban@yahoo.com

Ilustrator:

Febriarto Cahyo Nugroho

Copyright © 2016

Direktorat Pembinaan Guru Pendidikan Dasar, Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan Kebudayaan.

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan. Salah satu Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pendidikan dan pelatihan (Diklat) Guru Pembelajar.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan dibawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Diklat Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggungjawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016
Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.
NIP 196002231985032001

Daftar Isi

KATA PENGANTAR.....	Error! Bookmark not defined.
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR	Error! Bookmark not defined.
DAFTAR TABEL.....	xi
PENDAHULUAN	1
A. LATAR BELAKANG	1
B. TUJUAN	1
C. PETA KOMPETENSI	3
D. RUANG LINGKUP.....	4
E. SARAN PENGGUNAAN MODUL.....	5
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1	7
A. TUJUAN	7
B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI.....	7
C. URAIAN MATERI	7
1. BILANGAN ASLI	7
2. BILANGAN BULAT	10
3. BILANGAN RASIONAL.....	13
4. BILANGAN IRRASIONAL	16
5. BILANGAN REAL	18
6. CONTOH PEMBUKTIAN TERKAIT SISTEM BILANGAN.....	21
D. AKTIVITAS BELAJAR	22
E. LATIHAN/KASUS/TUGAS.....	23
F. RANGKUMAN.....	24
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT	25
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2	27
A. TUJUAN	27
B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI.....	27
C. URAIAN MATERI	27

1. PEMBAGI DAN KELIPATAN	27
2. BILANGAN PRIMA DAN KOMPOSIT	28
3. FPB DAN KPK.....	29
4. SIFAT KETERBAGIAN BILANGAN BULAT.....	30
5. BILANGAN BERPANGKAT POSITIF	32
6. BILANGAN BERPANGKAT NOL DAN BILANGAN BERPANGKAT NEGATIF	32
7. OPERASI PADA BILANGAN BERPANGKAT	33
14. BILANGAN BERPANGKAT PECAHAN	37
D. AKTIVITAS BELAJAR	39
E. LATIHAN/KASUS/TUGAS.....	41
F. RANGKUMAN.....	42
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT	44
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3	45
A. TUJUAN	45
B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI.....	45
C. URAIAN MATERI	45
1. PEMBULATAN	45
2. ANGKA PENTING.....	46
3. ESTIMASI (PENAKSIRAN)	49
D. AKTIVITAS BELAJAR	51
E. LATIHAN/KASUS/TUGAS.....	52
F. RANGKUMAN.....	52
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT	54
KEGIATAN PEMBELAJARAN 4	55
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	55
B. INDIKATOR PENCAPAIAN	55
C. URAIAN MATERI	56
3. POLA BILANGAN	60
4. BARISAN BILANGAN (SEKUENS)	61
5. DERET BILANGAN (<i>SERIES</i>).....	63
D. AKTIFITAS PEMBELAJARAN	64

E. LATIHAN/KASUS/TUGAS.....	67
F. RANGKUMAN.....	67
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT	68
KEGIATAN PEMBELAJARAN 5.....	69
A. TUJUAN PEMBELAJARAN.....	69
B. INDIKATOR PENCAPAIAN	69
C. URAIAN MATERI	70
1. BARISAN ARITMETIKA.....	70
2. DERET ARITMETIKA	78
D. AKTIFITAS PEMBELAJARAN	83
E. LATIHAN/KASUS/TUGAS.....	86
F. RANGKUMAN.....	87
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT	88
KEGIATAN PEMBELAJARAN 6.....	89
A. TUJUAN PEMBELAJARAN.....	89
B. INDIKATOR PENCAPAIAN	89
1. GURU PEMBELAJAR MAMPU MENJELASKAN DEFINISI BARISAN GEOMETRI, SUKU PERTAMA U_1 , RASIO R DAN SUKU KE- N U_N DARI BARISAN GEOMETRI	89
2. GURU PEMBELAJAR MAMPU MENENTUKAN RUMUS UMUM SUKU KE- N U_N , JIKA SUKU PERTAMA DAN RASIO R DIKETAHUI	89
C. URAIAN MATERI	90
1. BARISAN GEOMETRI	90
2. DERET GEOMETRI.....	97
D. AKTIFITAS PEMBELAJARAN	109
E. LATIHAN/KASUS/TUGAS.....	113
F. RANGKUMAN.....	114
G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT	115
• KG1 : BILANGAN.....	117
EVALUASI	127
PENUTUP	133

Daftar Isi

DAFTAR PUSTAKA.....	135
GLOSARIUM.....	137

Daftar Tabel

Table 1	62
Table 2	71



Pendahuluan

A. Latar Belakang

Merujuk pada Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya memunculkan paradigma baru profesi guru. Guru tidak lagi sekedar pelaksana teknis di kelas, tetapi lebih sebagai suatu jabatan fungsional. Jabatan fungsional guru adalah jabatan fungsional yang mempunyai ruang lingkup, tugas, tanggung jawab, dan wewenang untuk melakukan kegiatan mendidik, mengajar, membimbing, mengarahkan, melatih, menilai, dan mengevaluasi peserta didik pada pendidikan anak usia dini jalur pendidikan formal, pendidikan dasar, dan pendidikan menengah sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang diduduki oleh Pegawai Negeri Sipil (Pasal 1 ayat 1). Konsekuensinya adalah guru dituntut melakukan pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) sehingga guru dapat menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional.

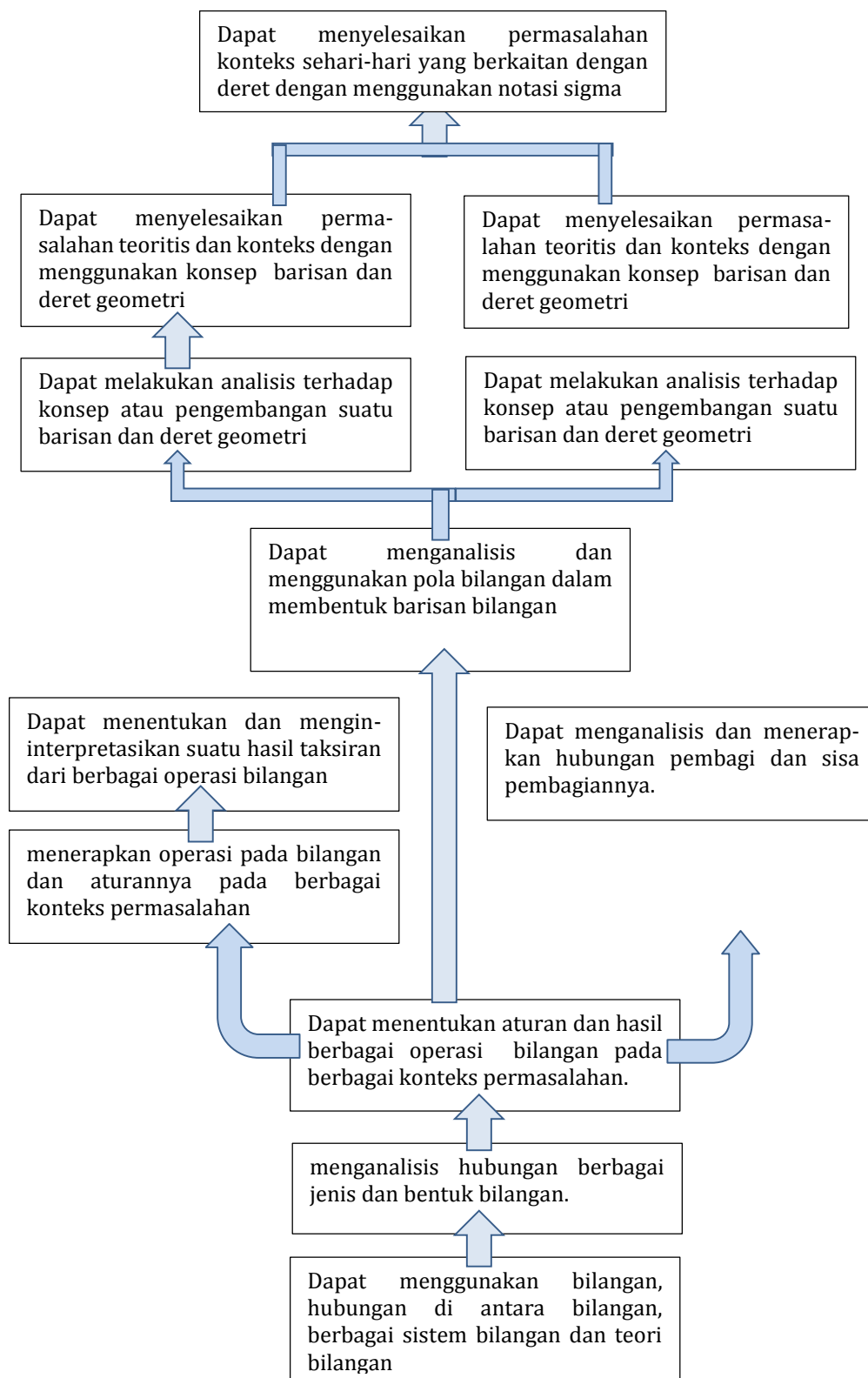
B. Tujuan

Tujuan disusunnya modul diklat PKB materi Bilangan, Barisan, Deret dan Notasi Sigma ini adalah memberikan pemahaman bagi guru pembelajar tentang konsep dasar Bilangan, Barisan dan Deret. Secara khusus tujuan penyusunan modul ini adalah:

1. Guru pembelajar mampu menggunakan bilangan, hubungan di antara bilangan, berbagai sistem bilangan dan teori bilangan.
2. Guru pembelajar mampu menganalisis hubungan berbagai jenis dan bentuk bilangan.
3. Guru pembelajar mampu menganalisis dan menerapkan hubungan pembagi dan sisa pembagiannya.
4. Guru pembelajar mampu menerapkan operasi pada bilangan dan aturannya pada berbagai konteks permasalahan.
5. Guru pembelajar mampu menggunakan pendekatan dan penaksiran.
6. Guru pembelajar mampu menentukan hasil taksiran dari operasi beberapa bilangan.

7. Guru pembelajar mampu menganalisis dan menggunakan notasi sigma dalam menyajikan deret bilangan
8. Guru pembelajaran mampu menggunakan pola bilangan dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan barisan dan deret
9. Guru pembelajar mampu menganalisis suatu barisan dan deret aritmetika
10. Guru pembelajar mampu menggunakan konsep barisan dan deret aritmetika dalam menyelesaikan permasalahan konteks dalam kehidupan sehari-hari
11. Guru pembelajar mampu menganalisis suatu barisan dan deret geometri
12. Guru pembelajar mampu menggunakan konsep barisan dan deret geometri dalam menyelesaikan permasalahan konteks dalam kehidupan sehari-hari
13. Guru pembelajar mampu menyelesaikan permasalahan konteks yang berkaitan dengan deret dalam notasi sigma

C. Peta Kompetensi



D. Ruang Lingkup

Pembahasan pada modul ini dibahas tentang pengertian sistem bilangan, sifat keterbagian bilangan, aproksimasi (pendekatan) dan estimasi (penaksiran) dari suatu perhitungan, sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar, serta operasi pada bilangan berpangkat. Disamping itu, materi tentang notasi sigma, sifat-sifat dan terapannya dalam penyajian suatu bentuk jumlahan. Selanjutnya, materi tentang karakteristik pola bilangan yang sangat berperan dalam membentuk suatu barisan dan deret bilangan. Materi barisan meliputi barisan aritmetika dan geometri, sifat-sifat dari unsur-unsur barisan, menentukan suatu barisan baru melalui penyisipan dan pengembangan konsep barisan. Pembahasan materi deret meliputi deret aritmetika dan deret geometri, hubungan antar unsur-unsur deret dan pengembangannya dalam notasi sigma Khususnya, deret geometri dibahas tentang deret geometri berhingga dan deret geometri tak hingga. Pada submodul akhir, dibahas suatu barisan yang bukan barisan aritmetika maupun barisan geometri yaitu barisan berderajat dua dan barisan berderajat tiga. Pembahasan meliputi karakteristik dan bagaimana menentukan rumus umum suku ke- n barisan tersebut. Pembahasan tentang Notasi Sigma, sifat-sifat operasinya dan aplikasinya dalam menyajikan suatu deret bilangan. Setiap pembahasan, dimulai dengan contoh sederhana yang terkait, teori-teori, pengembangan teori, diikuti contoh yang mendukung dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru pembelajar di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para guru pembelajar disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan/evaluasi yang ada. Saran dan masukan yang membangun untuk modul ini dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta, Kode pos 55281, Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752, alamat email : p4tkmatematika@yahoo.com.

E. Saran Penggunaan Modul

Modul ini diperuntukkan pada saat Guru Pembelajar melakukan kegiatan diklat, namun demikian Guru Pembelajar diharapkan tetap dapat memanfaatkan di luar kediklatan. Untuk dapat mengerjakan tugas, Guru Pembelajar dapat membaca sumber bacaan yang berada di uraian materi modul ini atau sumber lain yang mendukung. Setelah selesai membaca uraian materi dan mengerjakan soal evaluasi, Guru Pembelajar diharapkan melakukan refleksi sesuai dengan panduan pada bagian umpan balik dan tindak lanjut.

Kegiatan Pembelajaran 1

A. Tujuan

- Guru Pembelajaran dapat menentukan karakteristik bilangan dan hasil operasi bilangan dalam sistem bilangan
- Guru Pembelajaran dapat menentukan hubungan di antara bilangan pada berbagai sistem bilangan dan teori bilangan

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

- Guru Pembelajaran dapat menganalisis karakteristik suatu jenis bilangan
- Guru Pembelajaran dapat menganalisis dan menggunakan hubungan berbagai jenis bilangan dalam menyelesaikan soal-soal dan permasalahan konteks sehari-hari

C. Uraian Materi

Sistem Bilangan

1. Bilangan Asli

Himpunan bilangan yang paling awal digunakan manusia adalah himpunan bilangan yang digunakan untuk mencacah (*to count*) banyak objek. Misal untuk mencacah banyak ternak, banyak rumah, dan sebagainya. Himpunan bilangan ini disebut himpunan bilangan asli (*natural numbers*). Notasi atau lambang untuk himpunan bilangan asli adalah \mathbb{N} (internasional) atau A (Indonesia). Pada modul ini akan digunakan notasi \mathbb{N} sehingga ditulis

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

Sifat tertutup

Apabila kita menjumlahkan atau mengalikan dua bilangan asli, kita mengetahui bahwa hasil operasinya juga merupakan bilangan asli. Hal ini sesuai dengan satu sifat operasi pada bilangan asli, yaitu sifat tertutup (*closure property*).

Sifat tertutup operasi penjumlahan pada \mathbb{N}

Misalkan \mathbb{N} adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka berlaku $a + b$ merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa \mathbb{N} tertutup terhadap operasi penjumlahan (*closed for addition*).

Contoh :

Apakah himpunan $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan?

Solusi:

Himpunan K tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan karena terdapat bilangan $5, 7 \in K$ dan $5 + 7 = 12$ dengan $12 \notin K$.

Definisi perkalian

Perkalian (*multiplication*) dinyatakan sebagai penjumlahan berulang. Untuk $a \neq 0$, perkalian dinyatakan sebagai berikut:

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \cdots b}_{a \text{ suku}}$$

Jika $a = 0$, maka $0 \times b = 0$.

Sifat tertutup operasi perkalian pada \mathbb{N}

Misalkan \mathbb{N} adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka ab juga merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa \mathbb{N} tertutup terhadap operasi perkalian (*closed for multiplication*).

Contoh :

Apakah himpunan $B = \{0, 1\}$ tertutup terhadap operasi perkalian?

Solusi:

Himpunan B tertutup terhadap operasi perkalian karena seluruh hasil perkalian yang mungkin terjadi berada di dalam B .

$$0 \times 0 = 0 \quad 0 \times 1 = 0 \quad 1 \times 0 = 0 \quad 1 \times 1 = 1$$

Sifat komutatif dan asosiatif

Untuk sebarang bilangan asli a , b , dan c berlaku

- Sifat komutatif
 - ✓ Pada penjumlahan: $a + b = b + a$
 - ✓ Pada perkalian: $ab = ba$
- Sifat asosiatif
 - ✓ Pada penjumlahan: $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - ✓ Pada perkalian: $(ab)c = a(bc)$

Sifat komutatif dapat kita gunakan untuk menyusun urutan bilangan yang akan dioperasikan. Sedangkan sifat asosiatif dapat kita gunakan untuk mengelompokkan bilangan-bilangan yang akan dioperasikan.

Apakah sifat komutatif juga berlaku untuk operasi pengurangan dan pembagian dua bilangan asli? Jelaskan jawaban Anda.

Sifat distributif

Misalkan a , b , dan c adalah sebarang bilangan asli, maka berlaku

$$a(b + c) = ab + ac$$

Pada himpunan bilangan asli \mathbb{N} berlaku sifat distributif penjumlahan terhadap perkalian, coba Anda jelaskan.

Definisi pengurangan

Operasi pengurangan didefinisikan dalam bentuk penjumlahan sebagai berikut:

$$a - b = x \text{ berarti } a = b + x$$

Himpunan \mathbb{N} tidak tertutup terhadap operasi pengurangan, cukup ditunjukkan satu contoh penyangkal, sebagai berikut.

Dipilih $2, 3 \in \mathbb{N}$ dan dibuktikan $3 - 2 \neq 2 - 3$

Menurut definisi pengurangan, $3 - 2 = 1$, karena $3 = 2 + 1$. Tetapi $2 - 3 \notin \mathbb{N}$ karena menurut definisi pengurangan, $2 = 3 + x$ dan tidak terdapat $x \in \mathbb{N}$ sehingga $2 = 3 + x$. Jadi, himpunan \mathbb{N} tidak bersifat komutatif terhadap operasi pengurangan.

2. Bilangan Bulat

Mula-mula orang hanya memerlukan himpunan bilangan asli untuk perhitungan sehari-hari, misalnya seorang peternak mencacah banyak hewan ternak yang dimilikinya. Pada suatu saat, sang peternak tersebut mendapat musibah karena semua hewan ternaknya mati terserang wabah penyakit. Misalkan semula peternak tersebut mempunyai 100 ekor ternak. Karena mati semua maka hewan ternaknya habis tidak tersisa. Dalam kasus peternak tersebut, operasi hitung yang terjadi adalah $100 - 100$. Untuk semesta himpunan bilangan asli \mathbb{N} , kita tidak dapat menemukan suatu bilangan yang memenuhi hasil operasi $100 - 100$. Oleh karena itu perlu dilakukan perluasan dengan menambah satu bilangan baru, yaitu 0 yang merupakan hasil operasi $100 - 100$. Himpunan bilangan asli yang sudah diperluas dengan menambah bilangan 0 tersebut dinamakan himpunan bilangan cacah (*whole numbers*), dinotasikan dengan \mathbb{W} . Dengan demikian $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.

Himpunan bilangan cacah diperluas lagi dengan menambahkan lawan dari setiap bilangan asli. Sebagai contoh, lawan dari bilangan 3, yang dinotasikan dengan -3 , adalah suatu bilangan yang jika ditambahkan dengan 3 akan memberikan hasil 0. Jika lawan dari semua bilangan asli tersebut ditambahkan ke dalam himpunan bilangan cacah \mathbb{W} , maka akan diperoleh himpunan bilangan baru yang dinamakan himpunan bilangan bulat (*integers*), dan dinotasikan dengan \mathbb{Z} (berasal dari bahasa Jerman "*Zahlen*"). Dengan demikian $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} dapat diklasifikasikan ke dalam tiga kelompok, yaitu:

- Himpunan bilangan bulat positif: $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Nol: $\{0\}$
- Himpunan bilangan bulat negatif: $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$

Pembagian bilangan bulat

Pembagian didefinisikan sebagai lawan dari operasi perkalian.

Jika a dan b masing-masing adalah bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka pembagian $a \div b$, dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$, dan didefinisikan sebagai

$$\frac{a}{b} = z \text{ berarti } a = bz$$

Karena pembagian didefinisikan dalam bentuk perkalian, aturan-aturan pembagian bilangan bulat identik dengan aturan-aturan perkalian bilangan bulat. Hal yang perlu diperhatikan adalah pada pembagian $a \div b$, syarat $b \neq 0$ harus dipenuhi karena pembagian dengan 0 tidak didefinisikan. Mengapa? Perhatikan dua situasi berikut.

- Pembagian bilangan bukan 0 dengan 0.

$$a \div 0 \text{ atau } \frac{a}{0} = x$$

Apa artinya? Apakah terdapat suatu bilangan x yang menyebabkan $a \div 0$ menjadi bermakna? Menurut definisi pembagian, bilangan x seharusnya adalah bilangan yang menyebabkan $a = 0 \cdot x$. Akan tetapi $0 \cdot x = 0$ untuk setiap x . Karena diketahui $a \neq 0$, maka situasi tersebut menjadi tidak mungkin. Dengan demikian $a \div 0$ tidak ada atau tidak didefinisikan.

- Pembagian 0 dengan 0.

$$0 \div 0 \text{ atau } \frac{0}{0} = x$$

Apa artinya? Apakah terdapat suatu bilangan x yang menyebabkan $0 \div 0$ menjadi bermakna? Menurut definisi pembagian, jelas bahwa setiap nilai x dapat memenuhi karena $0 \cdot x = 0$ untuk setiap x . Akan tetapi hal ini akan mengakibatkan terjadi keabsurdan. Perhatikan contoh berikut:

Jika $\frac{0}{0} = 2$ maka $0 \cdot 2 = 0$ dan jika $\frac{0}{0} = 5$ maka $0 \cdot 5 = 0$.

Karena perkalian 0 masing-masing dengan 2 dan 5 menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 0, maka dapat kita simpulkan bahwa $2 = 5$. Hal ini jelas salah sehingga $0 \div 0$ dinyatakan sebagai tidak tentu (*indeterminate*).

Himpunan \mathbb{Z} tidak tertutup terhadap operasi pembagian. Untuk membuktikan, pilih $4, 5 \in \mathbb{Z}$ dan $4 \div 5 = \frac{4}{5}$, dengan $\frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Sifat tertutup operasi penjumlahan bilangan bulat

Untuk $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$.

Sifat tertutup operasi perkalian bilangan bulat

Untuk $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(a \cdot b) \in \mathbb{Z}$.

Sifat asosiatif bilangan bulat

Untuk $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku

- $a + (b + c) = (a + b) + c.$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$

Sifat komutatif bilangan bulat

Untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku

- $a + b = b + a.$
- $a \cdot b = b \cdot a.$

Sifat distributif bilangan bulat

Untuk $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Elemen identitas

- Terdapat dengan tunggal elemen $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a.$
- Terdapat dengan tunggal elemen $1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$

Invers penjumlahan

Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dengan 0 merupakan identitas penjumlahan.

Aturan kanselasi penjumlahan

Jika $a + x = a + y$ maka $x = y$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $a + x = a + y$ maka $x = y$.

$a + x$	$=$	$a + y$	Hipotesis
$-a + (a + x)$	$=$	$-a + (a + y)$	Kedua ruas ditambah $-a$
$(-a + a) + x$	$=$	$(-a + a) + y$	Mengapa?
$0 + x$	$=$	$0 + y$	Mengapa?
x	$=$	y	Mengapa?

Aturan kanselasi perkalian

Jika $a \neq 0$ dan $a \cdot x = a \cdot y$ maka $x = y$

Coba Anda buktikan aturan kanselasi perkalian.

3. Bilangan Rasional

Kebutuhan manusia yang semakin berkembang, khususnya terkait dengan keakuratan dalam perhitungan dan pengukuran menyebabkan perlunya perluasan sistem himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} . Untuk keperluan ini, dibentuk sistem bilangan baru yang disebut himpunan bilangan rasional.

Himpunan bilangan rasional, dinotasikan dengan \mathbb{Q} , adalah himpunan semua bilangan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Perhatikan bahwa bilangan rasional berbentuk pecahan. Pada aritmetika jika suatu bilangan dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ berarti $a \div b$, dengan a dinamakan pembilang (*numerator*) dan b dinamakan penyebut (*denominator*). Apabila a dan b keduanya bilangan bulat, maka $\frac{a}{b}$ dinamakan sebagai:

- pecahan biasa (*proper fraction*) jika $a < b$
- pecahan tak biasa (*improper fraction*) jika $a > b$
- bilangan cacah (*whole numbers*) jika b membagi habis a

Untuk setiap bilangan rasional $\frac{a}{b}$ yang tidak sama dengan 0, terdapat suatu invers perkalian $\frac{b}{a}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Perhatikan bahwa $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab}$. Bentuk $\frac{b}{a}$ sering dinamakan sebagai kebalikan (*reciprocal*) dari $\frac{a}{b}$.

Sifat dasar pecahan

Sifat dasar pecahan (*fundamental property of fractions*) adalah :

Jika $\frac{a}{b}$ adalah sebarang bilangan rasional dan x adalah sebarang bilangan bulat yang tidak sama dengan 0, maka berlaku

$$\frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{x \cdot a}{x \cdot b} = \frac{a}{b}$$

Langkah-langkah untuk menyederhanakan suatu pecahan, adalah (i) tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut, (ii) gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan tersebut.

Contoh:

Sederhanakan pecahan berikut:

a. $\frac{24}{30}$

b. $\frac{300}{144}$

Solusi:

- a. Langkah pertama tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut.

$$\begin{aligned}24 &= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \\30 &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\FPB(24, 30) &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6\end{aligned}$$

Selanjutnya gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan.

$$\frac{24}{30} = \frac{6 \cdot 2^2}{6 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$$

- b. Anda coba dengan langkah yang sama dengan langkah a.

Perhatikan bahwa pecahan $\frac{4}{5}$ sudah dalam bentuk paling sederhana karena FPB dari pembilang dan penyebut adalah 1.

Operasi hitung bilangan rasional

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah bilangan-bilangan rasional, maka:

- Penjumlahan: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
- Pengurangan: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$
- Perkalian: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Pembagian: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, dengan $\frac{c}{d} \neq 0$

Himpunan bilangan rasional \mathbb{Q} bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (dengan bilangan bulat bukan 0).

Akan ditunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan. Untuk sifat-sifat yang lain, sebagai latihan. Misalkan $\frac{x}{y}$ dan $\frac{w}{z}$ adalah sebarang dua bilangan rasional. Menurut definisi penjumlahan,

$$\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \frac{xz + wy}{yz}$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\frac{xz+wy}{yz}$ juga merupakan bilangan rasional.

Sifat tertutup operasi penjumlahan bilangan rasional

Untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, maka $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$.

Sifat tertutup operasi perkalian bilangan rasional

Untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, maka $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$.

Sifat asosiatif

Untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku

- $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$.
- $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$.

Sifat komutatif

Untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

Sifat distributif

Untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$.

Elemen identitas

- Terdapat dengan tunggal elemen $\frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.
- Terdapat dengan tunggal elemen $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Invers penjumlahan

Untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $\left(-\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$, dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.

Invers perkalian

Untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, dengan $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, terdapat dengan tunggal elemen $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, dengan $\frac{1}{1}$ merupakan identitas perkalian.

4. Bilangan Irrasional

Yoga mempunyai sebidang kebun berbentuk persegi dengan luas 1600 m². Dia merencanakan untuk membuat pagar di sekeliling kebun tersebut. Berapa panjang pagar yang diperlukan oleh Yoga? Supaya dapat membantu Yoga, kita terlebih dahulu harus mengetahui panjang sisi kebun agar dapat menghitung keliling kebun tersebut. Misal panjang sisi kebun adalah p meter. Berarti Yoga harus menyusun persamaan $p \times p = 1600$. Dalam hal ini $p = 40$ karena $40 \times 40 = 1600$ atau $40^2 = 1600$. Dengan demikian Yoga harus membangun pagar sepanjang $4 \times 40 = 160$ meter. Proses menentukan nilai $p = 40$ ini disebut proses melakukan penarikan akar kuadrat atau akar pangkat dua dari 1600 dan ditulis sebagai $\sqrt{1600} = 40$. Bentuk $\sqrt{1600}$ dibaca “akar kuadrat dari 1600” atau “akar pangkat dua dari 1600”.

Penting untuk dicermati bahwa walaupun $(-40) \times (-40) = 1600$, akan tetapi dalam situasi ini panjang sisi tidak mungkin negatif sehingga kita hanya menggunakan nilai $p = 40$.

Secara umum, jika a tidak negatif ($a \geq 0$) maka \sqrt{a} adalah suatu bilangan tidak negatif yang hasil kuadratnya sama dengan a .

Akar kuadrat dari suatu bilangan nonnegatif n adalah suatu bilangan yang jika dikuadratkan hasilnya adalah n . Secara notasi, akar kuadrat positif dari n , dinyatakan dengan \sqrt{n} , didefinisikan sebagai suatu bilangan sedemikian hingga $\sqrt{n}\sqrt{n} = n$.

Secara umum kita dapat menyimpulkan:

- Jika $a \geq 0$, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika dan hanya jika $b^n = a$ dan $b \geq 0$.
- Jika $a < 0$ dan n bilangan ganjil, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika dan hanya jika $b^n = a$.

Bagaimana dengan situasi mencari penyelesaian $p^2 = 2$? Karena kita tidak dapat mencari bilangan rasional p sedemikian hingga $p^2 = 2$, maka $\sqrt{2}$ disebut bilangan irrasional. Himpunan bilangan irrasional adalah himpunan bilangan yang representasi desimalnya tidak berhenti (*nonterminating*) atau tidak berulang (*nonrepeating*). Beberapa contoh bilangan irrasional selain $\sqrt{2}$ misalnya $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$. Contoh bilangan irrasional yang lain adalah bilangan π yang merupakan rasio keliling lingkaran terhadap diameternya dan bilangan e yang merupakan bilangan yang digunakan sebagai bilangan dasar dalam pertumbuhan dan peluruhan. Nilai π sebesar 3,141592654 dan e adalah 2,718281828 yang diperoleh dengan menggunakan kalkulator hanya berupa nilai pendekatan, bukan nilai eksak.

Operasi dengan bentuk akar

Beberapa syarat yang perlu dipenuhi dalam menyederhanakan suatu bentuk akar yang merupakan bilangan irasional.

Suatu bentuk akar dapat disederhanakan (simplified) jika:

- Bilangan di bawah tanda akar (*radicand*) tidak mempunyai faktor dengan pangkat lebih besar dari 1
- Bilangan di bawah tanda akar tidak dituliskan dalam bentuk pecahan atau menggunakan pangkat negatif
- Tidak ada notasi akar pada penyebut dari pecahan

Aturan bentuk akar

Misal a dan b adalah bilangan-bilangan positif, maka

a. $\sqrt{0} = 0$

c. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

b. $\sqrt{a^2} = a$

d. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

5. Bilangan Real

Himpunan bilangan real merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irrasional dan dinotasikan dengan \mathbb{R} .

Representasi desimal

Perhatikan representasi desimal dari sebuah bilangan real. Jika bilangan tersebut adalah bilangan rasional, maka representasi desimalnya adalah berhenti (*terminating*) atau berulang (*repeating*).

Contoh:

Gunakan kalkulator untuk menentukan representasi desimal dari bilangan-bilangan rasional berikut.

a. $\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{6}$

b. $\frac{2}{3}$

d. $\frac{5}{11}$

Solusi:

1. $\frac{1}{4} = 0,25$ merupakan desimal berhenti (*terminating decimal*)
2. $\frac{2}{3} = 0,666$ merupakan desimal berulang (*repeating decimal*),
3. $\frac{1}{6} = 0,166 \dots$ merupakan desimal berulang (*repeating decimal*)
4. $\frac{1}{7} \approx 0,143$ tampilan layar kalkulator menunjukkan 0,1428571429

Bandingkan hasil perhitungan menggunakan kalkulator dengan menggunakan pembagian bersusun.

Apabila suatu desimal berulang, kita menggunakan tanda bar “ $\overline{}$ ” untuk menunjukkan banyak angka perulangannya. Sebagai contoh:

- Perulangan satu angka $\frac{2}{3} = 0, \overline{6}$
- Perulangan dua angka $\frac{5}{11} = 0, \overline{45}$; $\frac{1}{6} = 0, \overline{16}$

Bilangan real yang merupakan bilangan irrasional mempunyai representasi desimal yang tidak berhenti (*nonterminating*) dan tidak berulang (*nonrepeating*).

Sebagai contoh:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414213 \dots \\ \pi &= 3,141592 \dots \\ e &= 2,71828 \dots\end{aligned}$$

Pada bilangan-bilangan tersebut tidak terdapat pola perulangan sehingga merupakan bilangan irrasional.

Kita mempunyai beberapa cara untuk mengklasifikasikan bilangan real:

- Bilangan positif, bilangan negatif, atau nol
- Bilangan rasional atau bilangan irrasional
 - Jika representasi desimalnya berhenti, maka merupakan bilangan rasional
 - Jika representasi desimalnya berulang, maka merupakan bilangan rasional
 - Jika bilangan tersebut tidak mempunyai representasi desimal yang berhenti atau berulang, maka merupakan bilangan irrasional

Sifat-sifat himpunan bilangan Riil

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka berlaku

	Penjumlahan	Perkalian
Tertutup	$(a + b) \in \mathbb{R}$	$ab \in \mathbb{R}$
Asosiatif	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Komutatif	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Distributif perkalian	$a(b + c) = ab + ac$	

terhadap penjumlahan	
-------------------------	--

Elemen identitas pada penjumlahan

Terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$

Bilangan 0 tersebut dinamakan elemen identitas pada penjumlahan (*identity for addition*).

Elemen identitas pada perkalian

Terdapat bilangan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku

$$1 \times a = a \times 1 = a$$

Bilangan 1 tersebut dinamakan elemen identitas pada perkalian (*identity for multiplication*).

Sifat invers pada penjumlahan

Untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}$, terdapat dengan tunggal bilangan $(-a) \in \mathbb{R}$, dinamakan lawan atau invers penjumlahan (*additive inverse*) dari a , sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Hasil perkalian suatu bilangan real dengan kebalikannya (*reciprocal*) adalah 1, yang merupakan elemen identitas pada perkalian. Kebalikan suatu bilangan merupakan invers perkalian dari bilangan tersebut.

Perhatikan contoh berikut.

$$5 \times \square = \square \times 5 = 1$$

Kita akan mencari bilangan yang jika dikalikan dengan 5 hasilnya 1.

$$5 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 5 = 1$$

Karena $\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$, maka $\frac{1}{5}$ merupakan invers dari 5 pada perkalian.

Sifat invers pada perkalian

Untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}$, dengan $a \neq 0$, terdapat dengan tunggal bilangan $a^{-1} \in \mathbb{R}$, dinamakan kebalikan (*reciprocal*) atau invers perkalian dari a , sehingga

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$$

6. Contoh Pembuktian Terkait Sistem Bilangan

Pada bagian ini akan diberikan beberapa uraian contoh pembuktian terkait sistem bilangan.

- 1) Buktikan bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode pembuktian langsung.

Misalkan m dan n merupakan sebarang bilangan bulat genap. Akan dibuktikan bahwa $m + n$ merupakan bilangan bulat genap. Menurut definisi bilangan genap, $m = 2r$ dan $n = 2s$ untuk r dan s sebarang anggota bilangan bulat.

Maka

$$\begin{aligned} m + n &= 2r + 2s \\ &= 2(r + s) \end{aligned}$$

Misalkan $t = r + s$. Perhatikan bahwa t jelas merupakan bilangan bulat karena t adalah hasil penjumlahan bilangan-bilangan bulat. Sehingga bentuk $m + n$ dapat dituliskan sebagai $m + n = 2t$, dengan t merupakan bilangan bulat. Karena $m + n = 2t$, maka sesuai dengan definisi bilangan genap hasil penjumlahan $m + n$ juga bilangan genap. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

- 2) Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan bulat ganjil juga merupakan bilangan bulat ganjil.

Coba Anda buktikan, sebagai acuan bahwa m suatu bilangan ganjil jika $m = 2n + 1$, untuk suatu n bilangan bulat.

- 3) Buktikan bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode kontradiksi.

Andaikan hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional bukan merupakan bilangan irrasional. Dengan kata lain, hasil penjumlahannya merupakan bilangan rasional.

Misalkan terdapat bilangan rasional r dan bilangan irrasional s sedemikian hingga $r + s$ merupakan bilangan rasional. Menurut definisi bilangan rasional, $r = \frac{a}{b}$ dan $s = \frac{c}{d}$, untuk suatu bilangan bulat a, b, c , dan d , dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$.

Menggunakan substitusi diperoleh

$$\frac{a}{b} + s = \frac{c}{d}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} s &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{bc - ad}{bd} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa bentuk $bc - ad$ dan bd , keduanya merupakan bilangan bulat. Mengapa, jelaskan pendapat Anda.

Akibatnya s merupakan hasil pembagian dua bilangan bulat, $bc - ad$ dan bd , dengan $bd \neq 0$. Sehingga menurut definisi bilangan rasional, s merupakan bilangan rasional. Hal ini menyebabkan kontradiksi dengan pemisalan awal bahwa s merupakan bilangan irrasional. Pengandaian salah. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.

D. Aktivitas Belajar

Kegiatan 1.

1. Suatu bilangan dilambangkan dengan a sedangkan lawannya dilambangkan dengan b . Jika $a < b$, manakah di antara a dan b yang merupakan bilangan positif dan manakah di antara a dan b yang merupakan bilangan negatif?
2. Pak Aan tahu bahwa jumlah dari dua bilangan rasional selalu merupakan bilangan rasional. Selanjutnya dia menyimpulkan bahwa jumlah dari dua

bilangan irrasional juga selalu merupakan bilangan irrasional. Berikan beberapa contoh yang menunjukkan bahwa kesimpulan Pak Aan salah.

3. Bu Ira berpendapat bahwa $\sqrt{\frac{18}{50}}$ adalah bilangan irrasional karena merupakan rasio dari $\sqrt{18}$ yang merupakan bilangan irrasional dan $\sqrt{50}$ yang juga merupakan bilangan irrasional. Apakah pendapat Bu Ira dapat dibenarkan? Berikan alasannya.
4. Apakah 0 merupakan bilangan rasional? Dapatkah Anda menuliskannya dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dengan p dan q adalah bilangan bulat dan $q \neq 0$? Jelaskan alasannya.
5. Nyatakan apakah pernyataan berikut benar atau salah. Berikan alasannya.
 - a. Setiap bilangan rasional merupakan bilangan cacah.
 - b. Setiap bilangan cacah merupakan bilangan rasional.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

Kegiatan 2.

1. Tunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional \mathbb{Q} bersifat tertutup terhadap operasi pengurangan.
2. Tunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional \mathbb{Q} bersifat tertutup terhadap operasi pembagian dengan bilangan bulat bukan 0.
3. Jelaskan apakah himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (dengan bilangan bulat bukan 0).
4. Diberikan himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ dan operasi \star yang didefinisikan sebagai $a \star b = 2a$. Buatlah sebuah tabel perkalian yang menunjukkan seluruh hasil yang mungkin dari operasi bilangan-bilangan pada himpunan tersebut.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Tentukan
 - a. Enam bilangan rasional di antara 3 dan 4.
 - b. Lima bilangan rasional di antara $\frac{3}{5}$ dan $\frac{4}{5}$.

2. Tunjukkan bahwa 3,142678 merupakan bilangan rasional.
3. Tunjukkan bahwa bilangan-bilangan berikut dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat dan $q \neq 0$.
 - a. 0,3333 ...
 - b. 1,272727 ...
 - c. 0,2353535 ...
4. Tuliskan sebuah bilangan irrasional di antara $\frac{1}{7}$ dan $\frac{2}{7}$.
5. Buktikan bahwa $\sqrt{3}$ merupakan bilangan irrasional.

F. Rangkuman

Himpunan bilangan asli (*counting numbers* atau *natural numbers*) digunakan untuk mencacah atau membilang banyak objek. Notasi atau lambang untuk himpunan bilangan asli menurut standar internasional adalah \mathbb{N} atau untuk notasi umum di Indonesia adalah A . Dengan demikian $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

Himpunan bilangan asli yang diperluas dengan menambah bilangan 0 dinamakan himpunan bilangan cacah (*whole numbers*), dinotasikan dengan \mathbb{W} . Dengan demikian $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.

Jika lawan dari semua bilangan asli ditambahkan ke dalam himpunan bilangan cacah \mathbb{W} , maka akan diperoleh himpunan bilangan bulat (*integers*), dan dinotasikan dengan \mathbb{Z} (berasal dari bahasa Jerman "*Zahlen*"). Dengan demikian $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan dua bilangan bulat, $\frac{a}{b}$, dengan bilangan bulat a disebut sebagai pembilang dan bilangan bulat $b \neq 0$ disebut sebagai penyebut.

Himpunan bilangan irrasional adalah himpunan bilangan yang representasi desimalnya tidak berhenti (*nonterminating*) atau tidak berulang (*nonrepeating*).

Himpunan bilangan real \mathbb{R} merupakan gabungan himpunan bilangan rasional \mathbb{Q} dan himpunan bilangan irrasional.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi Diri

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar ini maka lakukan beberapa hal berikut :

1. Tuliskan manfaat yang Anda dapatkan dalam mempelajari materi atau permasalahan konteks yang berkaitan dengan topik di atas
2. Tuliskan beberapa materi yang tidak mudah (sulit) untuk difahami
3. Tuliskan beberapa materi yang menantang untuk dipelajari sehingga memotivasi Anda untuk lebih giat dan serius belajar materi tersebut
4. Tuliskan beberapa materi lain yang dapat ditambahkan sehingga dapat melengkapi materi yang disajikan
5. Lakukan evaluasi diri secara jujur dari lima soal tersebut. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 20. Jadi skor total 50. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{\text{Skor yang diperoleh}}{100} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal evaluasi cocokkan jawaban Anda dengan jawaban evaluasi pada lampiran untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Jika Anda mendapat kesulitan untuk memahami suatu materi pada kegiatan belajar ini maka berusahalah untuk menyelesaikan dan jangan berputus asa. Penyelesaian dapat Anda lakukan melalui diskusi dengan teman atau bertanya kepada pembimbing atau mencari sumber lain (internet) yang dapat membantu Anda.

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq CK \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami pengertian bilangan. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq CK < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami pengertian bilangan walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq CK < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami pengertian bilangan. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$CK < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami pengertian bilangan. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

Kegiatan Pembelajaran 2

A. Tujuan

- Guru pembelajar mampu melakukan beberapa operasi bilangan dan menentukan hubungan pembagi dan sisa pembagiannya
- Guru pembelajar mampu menentukan karakteristik bilangan berpangkat dan operasi-operasinya

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

- Guru Pembelajar dapat menganalisis operasi bilangan dan menerapkan hubungan pembagi dan sisa pembagiannya
- Guru Pembelajar dapat menganalisis dan menerapkan sifat-sifat serta produk suatu operasi bilangan pada berbagai soal dan konteks permasalahan

C. Uraian Materi

Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat

1. Pembagi dan Kelipatan

Kelipatan dari suatu bilangan bulat adalah hasil perkalian bilangan bulat tersebut dengan sebarang bilangan bulat. Untuk sebarang bilangan bulat m dan n , hasil perkalian kedua bilangan bulat tersebut, yaitu mn , sekaligus merupakan kelipatan m dan kelipatan n .

Secara umum jika m habis dibagi n , dengan $n \neq 0$, maka kita mempunyai persamaan $\frac{m}{n} = k$ dengan k adalah suatu bilangan bulat dan $n \neq 0$. Jika kita kalikan kedua ruas persamaan tersebut dengan n maka akan kita dapatkan $m = kn$, yang jelas menunjukkan bahwa m adalah kelipatan dari n .

Jika $n \neq 0$, maka pernyataan " m habis dibagi n " artinya akan tepat sama dengan pernyataan " m adalah kelipatan n ".

Jika suatu bilangan bulat n habis dibagi oleh bilangan bulat yang lain d , maka kita katakan bahwa d adalah pembagi n . Istilah pembagi sama artinya dengan istilah faktor.

Jika hasil bagi $\frac{n}{d}$ juga merupakan bilangan bulat dan $d \neq 0$, maka pernyataan-pernyataan berikut mempunyai arti yang sama:

n adalah kelipatan d , n habis dibagi d , d adalah pembagi n , atau d membagi habis n

Pernyataan-pernyataan tersebut sering dilambangkan dalam simbol atau notasi matematika $d|n$. Jika d tidak membagi habis n maka dilambangkan $d \nmid n$.

Untuk suatu bilangan bulat n kita tahu bahwa $n = n \cdot 1$. Hal ini berarti bahwa sebarang bilangan bulat yang tidak sama dengan 0 adalah pembagi dari dirinya sendiri.

Pembagi sejati dari suatu bilangan bulat n adalah pembagi positif dari n yang bukan n itu sendiri.

Pernyataan-pernyataan berikut mempunyai arti yang sama:

- Jika a adalah pembagi b dan b adalah pembagi c , maka a adalah pembagi c .
- Jika b habis dibagi a dan c habis dibagi b , maka c habis dibagi a .
- Jika b adalah kelipatan a dan c adalah kelipatan b , maka c adalah kelipatan a .

2. Bilangan Prima dan Komposit

Setiap bilangan asli yang lebih besar dari 1 mempunyai paling sedikit dua buah pembagi atau faktor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan hanya tepat mempunyai dua buah pembagi yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

Bilangan komposit adalah bilangan asli lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima.

Bilangan 1 hanya mempunyai sebuah pembagi, yaitu 1 itu sendiri, sehingga 1 bukan bilangan prima dan bukan bilangan komposit. Ini adalah alasan mengapa 1 merupakan bilangan khusus.

Tidak ada bilangan asli yang sekaligus merupakan bilangan prima dan bilangan komposit.

Satu-satunya bilangan prima yang genap adalah 2.

Jika n adalah bilangan asli lebih dari 1 yang tidak mempunyai pembagi yang bukan merupakan bilangan prima yang kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} , maka n merupakan bilangan prima.

3. FPB dan KPK

Pembagi setiap bilangan bulat dalam suatu kelompok adalah pembagi persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

Dari pembagi persekutuan-pembagi persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, pembagi persekutuan yang paling besar disebut Pembagi Persekutuan Terbesar atau Faktor Persekutuan Terbesar dan disingkat FPB.

Notasi untuk FPB dari bilangan bulat m dan n adalah $\text{FPB}(m, n)$.

Jika satu-satunya pembagi persekutuan dari dua bilangan bulat adalah 1, maka kita katakan bahwa dua bilangan bulat tersebut saling prima relatif. Dengan kata lain, dua bilangan bulat m dan n saling prima relatif jika $\text{FPB}(m, n) = 1$. Pasangan bilangan bulat yang saling prima relatif sering disebut koprima.

Kelipatan setiap bilangan bulat dalam suatu kelompok adalah kelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

Dari kelipatan persekutuan-kelipatan persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, kelipatan persekutuan yang paling kecil disebut Kelipatan Persekutuan Terkecil dan disingkat KPK.

Notasi untuk KPK dari bilangan bulat m dan n adalah $\text{KPK}[m, n]$.

Algoritma Pembagian menyebutkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat a dan sebarang bilangan asli b , terdapat tepat satu pasang bilangan bulat q dan r sedemikian hingga

$$a = qb + r$$

dengan $0 \leq r < b$.

Pada Algoritma Pembagian, a disebut yang dibagi, b disebut pembagi, q disebut hasil bagi dan r disebut sisa bagi.

Pernyataan-pernyataan berikut mempunyai arti yang sama:

- Jumlah dan selisih dari sebarang dua kelipatan n juga merupakan kelipatan n .
- Jika $n|a$ dan $n|b$ maka $n|(a + b)$ dan $n|(a - b)$.
- Jika n adalah pembagi persekutuan dari dua bilangan bulat, maka n sekaligus juga pembagi dari jumlah dan selisih dari dua bilangan bulat tersebut.

Untuk sebarang bilangan asli m dan n , dengan $m > n$, maka

$$\text{FPB}(m, n) = \text{FPB}(m - n, n).$$

Algoritma Euclid mengaplikasikan fakta tersebut berulang kali, menghasilkan FPB dari satu pasang bilangan asli. Algoritma Euclid yang Diperluas mempercepat proses pencarian FPB dengan menggunakan sisa bagi r ketika m dibagi n .

$$\text{FPB}(m, n) = \text{FPB}(m - n, n) = \text{FPB}(m - 2n, n) = \dots = \text{FPB}(r, n)$$

4. Sifat Keterbagian Bilangan Bulat

Apabila kita membagi 42 dengan 6, maka tidak akan menghasilkan sisa bagi karena $42 \div 6 = 7$. Kita katakan bahwa 42 habis dibagi 6 atau 6 adalah faktor atau pembagi dari 42. Karena 42 juga habis dibagi 7, kita dapat mengatakan bahwa 7 juga merupakan faktor dari 42. Secara umum, jika a habis dibagi b , maka b adalah faktor dari a , atau dengan kata lain, faktor-faktor dari suatu bilangan membagi habis bilangan tersebut tanpa bersisa.

Karena 14 habis dibagi 2, yaitu $14 \div 2 = 7$, maka dikatakan bahwa 14 merupakan kelipatan 2. Secara umum, jika a habis dibagi b , maka a adalah kelipatan dari b .

Beberapa sifat keterbagian suatu bilangan:

- Suatu bilangan asli habis dibagi 2 jika angka satuan dari bilangan tersebut adalah 0, 2, 4, 6, dan 8.
- Suatu bilangan asli habis dibagi 3 jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 3.
- Suatu bilangan asli habis dibagi 4 jika dua angka terakhirnya adalah 0 atau habis dibagi 4.
- Suatu bilangan asli habis dibagi 5 jika angka terakhirnya adalah 0 atau 5.

- Suatu bilangan asli habis dibagi 6 jika bilangan tersebut habis dibagi 2 dan 3.
- Suatu bilangan asli habis dibagi 8 jika tiga angka terakhirnya habis dibagi 8.
- Suatu bilangan asli habis dibagi 9 jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 9.
- Suatu bilangan asli habis dibagi 10 jika angka terakhirnya adalah 0.
- Suatu bilangan asli habis dibagi 11 jika selisih jumlah angka pada posisi genap dengan jumlah angka pada posisi ganjil adalah 0 atau kelipatan 11.

Akan ditunjukkan pembuktian sifat keterbagian oleh 3 untuk kasus khusus bilangan tiga angka (ini sebagai jembatan sebelum pembuktian yang lebih umum untuk bilangan n angka).

Bilangan tiga angka dengan angka-angka a, b , dan c dapat dinyatakan dalam bentuk $100a + 10b + c$. Karena $100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c$, maka berakibat $100a + 10b + c$ habis dibagi 3 jika dan hanya jika $a + b + c$ habis dibagi 3. Terbukti bahwa suatu bilangan tiga angka habis dibagi 3 jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 3.

Berikutnya akan dibuktikan hal yang lebih umum sifat keterbagian oleh 3 untuk bilangan n angka.

Suatu bilangan n angka dengan angka-angka $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ dapat dinyatakan dalam bentuk $N = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0$. Karena bentuk $10^n - 1$ habis dibagi 3 untuk setiap nilai n (Perhatikan bentuk 9, 99, 999, 9999, 99999 dan seterusnya), kita dapat menuliskan dalam bentuk $N = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \dots + (10 - 1)a_1 + a_0 + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$. Sehingga N habis dibagi 3 jika dan hanya jika bentuk $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ habis dibagi 3.

Dengan demikian terbukti bahwa suatu bilangan habis dibagi 3 jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 3.

Untuk bukti sifat yang lain, dibuktikan secara sama (analog) dan sebagai latihan.

5. Bilangan Berpangkat Positif

Secara umum, jika a adalah bilangan real dan n bilangan bulat positif, maka dapat disimpulkan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Pada bentuk di atas a disebut bilangan pokok/basis, sedangkan n disebut pangkat/eksponen.

Contoh:

Hitunglah.

a. $(-5)^3$

b. $(5z)^2$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{a. } (-5)^3 &= (-5) \times (-5) \times (-5) \\ &= -125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (5z)^2 &= (5z) \times (5z) \\ &= 25z^2 \end{aligned}$$

6. Bilangan Berpangkat Nol dan Bilangan Berpangkat Negatif

Perhatikan bilangan berpangkat-bilangan berpangkat berikut ini:

$$\begin{aligned} 3^2 &= 9 \\ 3^1 &= 3 \end{aligned}$$

Perhatikan bagian ruas kanan dari pola di atas. Bilangan-bilangan yang menjadi hasil perpangkatan tersebut diperoleh dengan membagi 3 dari bilangan di atasnya. Karena 3 dibagi 3 hasilnya adalah 1, maka kita peroleh $3^0 = 1$. Apabila pola diteruskan, kita akan memperoleh bentuk:

$$\begin{aligned} 3^{-1} &= \frac{1}{3} \\ 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} \end{aligned}$$

Secara umum dari pola perpangkatan tersebut kita memperoleh pengertian bilangan berpangkat nol dan bilangan berpangkat negatif:

$$a^0 = 1, \text{ dengan } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ dengan } n \text{ bilangan bulat positif dan } a \neq 0$$

Contoh:

Hitunglah.

a. 5^0

b. $(-3)^{-2}$

Penyelesaian:

a. $5^0 = 1$

b. $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{9}$

7. Operasi pada Bilangan Berpangkat

• Aturan Pertama Bilangan Berpangkat

a. Pandang bentuk $3^4 \times 3^5$.

Sesuai dengan sifat bilangan berpangkat, $3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ faktor}}$ dan $3^5 =$

$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{5 \text{ faktor}}$. Sehingga bentuk $3^4 \times 3^5$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} 3^4 \times 3^5 &= \underbrace{(3 \times 3 \times 3 \times 3)}_{4 \text{ faktor}} \times \underbrace{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}_{5 \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{9 \text{ faktor}} \\ &= 3^9 \end{aligned}$$

Perhatikan pada bagian pangkat/eksponennya, jelas bahwa $4 + 5 = 9$. Dengan demikian kita dapat menuliskan $3^4 \times 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$.

Secara umum, Aturan Pertama Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$.

Contoh :

Sederhanakan dan tuliskan hasilnya dalam bentuk bilangan berpangkat.

a. $5^3 \times 5^7$

b. $6^2 \times 6^3 \times 6^5$

Penyelesaian:

a. $5^3 \times 5^7 = 5^{3+7}$
 $= 5^{10}$

b. $6^2 \times 6^3 \times 6^5 = (6^2 \times 6^3) \times 6^5 = 6^{2+3} \times 6^5 = 6^5 \times 6^5$
 $= 6^{5+5} = 6^{10}$

Contoh :

Sederhanakan bentuk $3p \times 6p^2$

Penyelesaian:

a. $3p \times 6p^2 = 3 \times p \times 6 \times p^2$
 $= 3 \times 6 \times p^{1+2}$
 $= 18p^3$

• **Aturan Kedua Bilangan Berpangkat**

Secara umum, Aturan Kedua Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:
 untuk m dan n adalah bilangan bulat positif, $m > n$, $a \neq 0$.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Contoh :

Sederhanakan $4^8 \div 4^3$ dan tuliskan hasilnya dalam bentuk bilangan berpangkat.

Penyelesaian

$4^8 \div 4^3 = 4^{8-3}$
 $= 4^5$

Contoh 2:

Sederhanakan yang berikut ini.

a. $\frac{p^5 \times p^6}{p^7}$

b. $9a^7 \div 3a^3 \times 6a^2$

Penyelesaian:

a. $\frac{p^5 \times p^6}{p^7} = \frac{(p^{5+6})}{p^7} = \frac{p^{11}}{p^7} = p^{11-7} = p^4$

b. $9a^7 \div 3a^3 \times 6a^2 = 3a^{7-3} \times 6a^2 = 3a^4 \times 6a^2 = 18a^{4+2} = 18a^6$

• **Aturan Ketiga Bilangan Berpangkat**

Secara umum, Aturan Ketiga Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut :
untuk m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0, b \neq 0$.

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Contoh :

Sederhanakan yang berikut ini.

a. $(2 \times 4)^3$

b. $(2a)^3 \times (3a)^2$

Penyelesaian:

a. $(2 \times 4)^3 = 2^3 \times 4^3 = 2^3 \times 4^3 = 512$

b. $(2a)^3 \times (3a)^2 = 2^3 \times a^3 \times 3^2 \times a^2 = 8 \times a^3 \times 9 \times a^2 = 72a^5$

• **Aturan Keempat Bilangan Berpangkat**

Secara umum, Aturan Keempat Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut
: untuk m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0, b \neq 0$ berlaku

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Contoh:

Sederhanakan yang berikut ini.

a. $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \times x^4$

b. $\left(\frac{a}{2}\right)^4 \times 8a^2$

Penyelesaian:

$$a. \left(\frac{x}{y}\right)^3 \times x^4 = \frac{x^3}{y^3} \times x^4 = \frac{x^3 \times x^4}{y^3} = \frac{x^7}{y^3}$$

$$b. \left(\frac{a}{2}\right)^4 \times 8a^2 = \frac{a^4}{2^4} \times 8a^2 = \frac{a^4 \times 8a^2}{16} = \frac{8}{16} \times a^4 \times a^2 = \frac{1}{2}a^6$$

- **Aturan Kelima Bilangan Berpangkat**

Secara umum, Aturan Kelima Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$.

Contoh :

Hitunglah.

$$a. (3^{-4})^2 \times (3^4)^3 \qquad b. \frac{(7^{-2} \times 7^6)^2}{(7^2)^3}$$

Penyelesaian:

$$a. (3^{-4})^2 \times (3^4)^3 = 3^{-4 \times 2} \times 3^{4 \times 3} = 3^{-8} \times 3^{12} = 81$$

$$b. \frac{(7^{-2} \times 7^6)^2}{(7^2)^3} = \frac{(7^{-2})^2 \times (7^6)^2}{(7^2)^3} = \frac{7^{-2 \times 2} \times 7^{6 \times 2}}{7^{2 \times 3}} = \frac{7^{-4} \times 7^{12}}{7^6} = 7^{-4+12-6} = 49$$

- **Bilangan Berpangkat Nol**

Secara umum, untuk $a \neq 0$ diperoleh bilangan berpangkat adalah

$$a^0 = 1$$

Contoh:

Hitunglah.

$$a. 3a^0 + 4b^0$$

$$b. 6x^2 \times x^4 \div 3x^6$$

Penyelesaian:

a. $3a^0 + 4b^0 = 3 \times 1 + 4 \times 1 = 7$

b. $6x^2 \times x^4 \div 3x^6 = 6x^{2+4} \div 3x^6 = 2x^{2+4-6} = 2x^0 = 2$

• **Bilangan Berpangkat Negatif**

Secara umum, untuk bilangan berpangkat negatif kita peroleh:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

dengan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$.

Contoh :

Tuliskan dalam bentuk bilangan berpangkat positif.

a. $(2y)^{-1}$

b. $\frac{1}{2^{-4}}$

Penyelesaian:

a. $(2y)^{-1} = \frac{1}{2y}$

b. $\frac{1}{2^{-4}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^4}\right)} = 1 \div \frac{1}{2^4} = 2^4 = 16$

Contoh :

Sederhanakan yang berikut ini dan tuliskan hasilnya dalam bentuk bilangan berpangkat positif.

a. $7^{-9} \times 7^4$

b. $b^{-8} \div b^{-3} \times b^5$

Penyelesaian:

a. $7^{-9} \times 7^4 = 7^{-9+4} = 7^{-5} = \frac{1}{7^5}$

b. $b^{-8} \div b^{-3} \times b^5 = b^{-8-(-3)+5} = b^{-8+3+5} = b^0 = 1$

14. Bilangan Berpangkat Pecahan

Secara umum, untuk a bilangan riil, m dan n adalah bilangan bulat positif serta $FPB(m, n) = 1$ diperoleh

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Jika n bilangan genap, maka disyaratkan bahwa $a \geq 0$.

Catatan:

- Seluruh aturan bilangan berpangkat bilangan bulat juga berlaku untuk bilangan berpangkat pecahan.
- Setiap ekspresi yang melibatkan tanda akar $\sqrt[n]{}$, dengan n adalah bilangan bulat positif disebut bentuk akar.

Contoh :

Tuliskan yang berikut ini ke dalam bentuk akar dan hitunglah hasilnya.

a. $4^{\frac{1}{2}}$

c. $8^{\frac{2}{3}}$

b. $27^{-\frac{1}{3}}$

Penyelesaian:

a. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

c. $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Contoh :

Tuliskan yang berikut ini ke dalam bentuk bilangan berpangkat pecahan.

a. $\sqrt[5]{a^3}$

b. $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

Penyelesaian:

a. $\sqrt[5]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{5}}$

$$b. \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{(x^m)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = x^{-\frac{m}{n}}$$

D. Aktivitas Belajar

Kegiatan 1.

1. Selidikilah. Apa kesimpulan Anda?
 - a. Apakah setiap kelipatan 10 juga merupakan kelipatan 5?
 - b. Bagaimana alasan Anda untuk menjelaskan bahwa suatu bilangan merupakan kelipatan 5?
 - c. Bagaimana alasan Anda untuk menjelaskan bahwa suatu bilangan merupakan kelipatan 2?
2. Selidikilah. Apa kesimpulan Anda?
 - a. Manakah di antara bilangan-bilangan berikut yang habis dibagi 4

$$12 \quad 312 \quad 512 \quad 2512 \quad 4312$$
 - b. Apakah setiap kelipatan 100 juga merupakan kelipatan 4?
 - c. Gunakan jawaban Anda pada bagian (b) untuk menjelaskan mengapa 5687623688 habis dibagi 4.
 - d. Gunakan jawaban Anda pada bagian (b) untuk menjelaskan mengapa 4650310 tidak habis dibagi 4.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

Kegiatan 2.

1. Selidikilah. Apa kesimpulan Anda?
 - a. Tentukan bilangan kuadrat positif terkecil yang habis dibagi empat bilangan prima terkecil.

- b. Bagaimana jawaban pertanyaan (a) akan berubah seandainya kata “positif” dihilangkan?
2. Selidikilah. Apa kesimpulan Anda?
 - a. Tentukan kelipatan positif terkecil dari 18 dan 24
 - b. Tentukan tiga kelipatan persekutuan positif terkecil dari 18 dan 24.
 - c. Tentukan kelipatan persekutuan terkecil dari 18 dan 24.
 - d. Bagaimana hubungan antara kelipatan persekutuan yang Anda peroleh pada pertanyaan (c) dengan kelipatan persekutuan terkecil yang Anda peroleh pada pertanyaan (d)?
3. Selidikilah. Apa kesimpulan Anda?
 - a. Misalkan 3 merupakan pembagi k . Apakah 3 juga merupakan pembagi $k + 3$? Jelaskan.
 - b. Misalkan 3 merupakan pembagi b dan c . Apakah 3 juga merupakan pembagi $b + c$? Jelaskan.
 - c. Misalkan 3 merupakan pembagi $b + c$. Apakah 3 juga merupakan pembagi b dan c ? Jelaskan.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

Kegiatan 3.

1. Jelaskan perbedaan antara $-\sqrt{9}$ dan $\sqrt{-9}$.
2. Kita mengetahui bahwa $5^3 = 125$ dan $5^4 = 625$. Jelaskan mengapa $\sqrt[3]{-125} = -5$ tetapi $\sqrt[4]{-625} \neq -5$.
3. Bu Bilkis menyederhanakan bentuk $\sqrt{192}$ dengan menuliskan
$$\sqrt{192} = \sqrt{16 \cdot 12} = 4\sqrt{12}$$
 - a. Jelaskan mengapa $4\sqrt{12}$ bukan bentuk paling sederhana dari $\sqrt{192}$.
 - b. Tunjukkan cara menyederhanakan bentuk $\sqrt{192}$ dengan mulai dari $4\sqrt{12}$.
4. Pak Wahyu berpendapat bahwa $(2)^3(5)^2 = (10)^5$. Apakah pendapat Pak Wahyu dapat dibenarkan? Jelaskan alasannya.

5. Pak Faiz berpendapat bahwa $(2)^3(5)^3 = (10)^3$. Apakah pendapat Pak Faiz dapat dibenarkan? Jelaskan alasannya.
6. Bu Tata berpendapat bahwa $a^0 + a^0 = a^{0+0} = a^0 = 1$. Apakah pendapat Bu Tata dapat dibenarkan? Jelaskan alasannya.
7. Bu Futik berpendapat bahwa $a^0 + a^0 = 2a^0 = 2$. Apakah pendapat Bu Futik dapat dibenarkan? Jelaskan alasannya.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

Kegiatan 4

1. Gunakan eksponen untuk menunjukkan bahwa untuk $a > 0$, maka $(\sqrt[n]{a})^0 = 1$.
2. Gunakan eksponen untuk menunjukkan bahwa untuk $a > 0$, maka $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.
3. Pak Yafi berpendapat bahwa untuk setiap $x \neq 0$, bentuk x^{-2} adalah bilangan positif kurang dari 1. Apakah pendapat Pak Yafi dapat dibenarkan? Berikan alasannya.
4. Untuk nilai $x < 0$ apakah berlaku $\sqrt{x^2} = -x$? Jelaskan alasannya.
5. Pak Dito mengatakan bahwa jika a adalah bilangan bulat genap dan $x \geq 0$ maka $\sqrt{x^a} = x^{\frac{a}{2}}$. Apakah pendapat Pak Dito dapat dibenarkan? Jelaskan alasannya.
6. Pak Sonny menyederhanakan bentuk $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ dengan menuliskan 7 sebagai $\sqrt{49}$, selanjutnya membagi pembilang dan penyebut dengan $\sqrt{7}$.
 - a. Tunjukkan bahwa cara yang dilakukan Pak Sonny dapat dibenarkan.
 - b. Dapatkah $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ disederhanakan menggunakan cara yang sama? Jelaskan alasannya.
7. Untuk merasionalkan penyebut dari $\frac{4}{2+\sqrt{8}}$, Bu Afiffah mengalikan dengan $\frac{2-\sqrt{8}}{2-\sqrt{8}}$ sedangkan Bu Marisha mengalikan dengan $\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. Jelaskan bahwa cara yang dilakukan Bu Afiffah dan Bu Marisha semuanya dapat dibenarkan.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Yoga mempunyai 24 bola merah dan 36 bola hijau yang dimasukkan ke dalam beberapa kotak. Masing-masing kotak memuat bola sama banyak. Terdapat

paling sedikit dua bola pada masing-masing kotak. Jika seluruh bola pada sebarang kotak mempunyai warna yang sama, tentukan banyaknya bola yang mungkin pada masing-masing kotak.

2. Tentukan bilangan bulat terbesar yang kurang dari 40 yang mempunyai sisa 2 jika dibagi oleh 7.
3. Tentukan bilangan tiga angka terbesar yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11.
4. Berapa banyak bilangan bulat antara 0 dan 100 yang bersisa 1 jika dibagi oleh 6?
5. Berapa banyak bilangan bulat antara 200 dan 300 yang bersisa 5 jika dibagi oleh 8?

F. Rangkuman

Suatu bilangan bulat m habis dibagi oleh suatu bilangan bulat n , dengan $n \neq 0$, jika hasil bagi $\frac{m}{n}$ juga merupakan bilangan bulat. Jika hasil bagi $\frac{m}{n}$ bukan merupakan bilangan bulat maka m tidak habis dibagi n .

Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan hanya tepat mempunyai dua buah pembagi/faktor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

Bilangan komposit adalah bilangan asli lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima.

Pembagi setiap bilangan bulat dalam suatu kelompok adalah pembagi persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

Dari pembagi persekutuan-pembagi persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, pembagi persekutuan yang paling besar disebut Pembagi Persekutuan Terbesar atau Faktor Persekutuan Terbesar dan disingkat FPB.

Jika satu-satunya pembagi persekutuan dari dua bilangan bulat adalah 1, maka dua bilangan bulat tersebut saling prima relatif. Dengan kata lain, dua bilangan bulat m dan n saling prima relatif jika $\text{FPB}(m, n) = 1$. Pasangan bilangan bulat yang saling prima relatif sering disebut koprima.

Kelipatan setiap bilangan bulat dalam suatu kelompok adalah kelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

Dari kelipatan persekutuan-kelipatan persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, kelipatan persekutuan yang paling kecil disebut Kelipatan Persekutuan Terkecil dan disingkat KPK.

Algoritma Pembagian menyebutkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat a dan sebarang bilangan asli b , terdapat tepat satu pasang bilangan bulat q dan r sedemikian hingga

$$a = qb + r$$

dengan $0 \leq r < b$.

Pada Algoritma Pembagian, a disebut yang dibagi, b disebut pembagi, q disebut hasil bagi dan r disebut sisa bagi.

Jika a adalah bilangan real dan n bilangan bulat positif, maka dapat disimpulkan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Pada bentuk di atas a disebut bilangan pokok/basis, sedangkan n disebut pangkat/eksponen.

Aturan Pertama Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$.

Aturan Kedua Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif, $m > n$, $a \neq 0$.

Aturan Ketiga Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(ab)^m = a^m b^m$$

dengan m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Aturan Keempat Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

dengan m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0, b \neq 0$.

Aturan Kelima Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$.

Untuk $a \neq 0$ maka diperoleh bilangan berpangkat nol adalah

$$a^0 = 1$$

Untuk bilangan berpangkat negatif kita peroleh:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

dengan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$.

Untuk bilangan berpangkat pecahan dapat disimpulkan:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

dengan n adalah bilangan bulat positif dan a sebarang bilangan real. Jika n merupakan bilangan genap dan a bilangan negatif, maka bentuk $a^{\frac{1}{n}}$ dan $\sqrt[n]{a}$ bukan merupakan bilangan real.

Secara umum untuk bilangan berpangkat pecahan dapat disimpulkan:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif dan $\text{FPB}(m, n) = 1$. Jika n bilangan genap, maka disyaratkan bahwa $a \geq 0$.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Belajar 1.

Kegiatan Pembelajaran 3

A. Tujuan

- Guru Pembelajaran dapat menjelaskan karakteristik pendekatan dan penaksiran suatu operasi bilangan
- Guru Pembelajaran dapat menentukan dan menggunakan pendekatan dan penaksiran dari suatu operasi bilangan
- Guru Pembelajaran dapat menganalisis dan menginterpretasikan suatu hasil penaksiran dari beberapa operasi bilangan

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Guru Pembelajaran dapat menentukan dan menginterpretasikan suatu hasil taksiran dari operasi bilangan

C. Uraian Materi

Pendekatan dan Penaksiran

1. Pembulatan

Secara umum, langkah-langkah untuk melakukan pembulatan terhadap suatu bilangan desimal sampai n tempat desimal adalah sebagai berikut:

- Perhatikan bilangan desimal yang akan dibulatkan.
- Jika bilangan tersebut akan dibulatkan sampai n tempat desimal, maka cek angka yang berada tepat pada posisi ke- $(n + 1)$ di sebelah kanan tanda koma.
- Apabila nilainya kurang dari 5 maka bulatkan ke bawah.
- Apabila nilainya lebih dari atau sama dengan 5 maka bulatkan ke atas.

Contoh:

1. Bulatkan 4,136 sampai:
 - a. 1 tempat desimal.
 - b. 2 tempat desimal.

Penyelesaian:

- a. 4,136 akan dibulatkan sampai 1 tempat desimal, sehingga kita cek angka yang berada pada posisi kedua di sebelah kanan tanda koma, yaitu 3. Karena nilainya kurang dari 5 ($3 < 5$), maka lakukan pembulatan ke bawah menjadi 4,1. Kita menuliskan $4,136 = 4,1$.
- b. 4,136 akan dibulatkan sampai 2 tempat desimal, sehingga dilakukan pengecekan pada angka yang berada pada posisi ketiga di sebelah kanan koma, yaitu 6. Karena $6 > 5$ maka pembulatan ke atas menjadi 4,14 dan ditulis $4,136 = 4,14$.

2. Bulatkan bilangan-bilangan berikut sampai puluhan terdekat:

- a. 137
- b. 65

Penyelesaian:

- a. Karena 137 lebih dekat ke 140 daripada ke 130, maka 137 dibulatkan ke atas sampai puluhan terdekat menjadi 140. Kita menuliskan $137 \approx 140$.
- b. Karena 65 tepat di pertengahan antara 60 dan 70, maka 65 dibulatkan ke atas sampai puluhan terdekat menjadi 70. Kita menuliskan $65 \approx 70$.

2. Angka Penting

Angka penting menunjuk ke angka-angka pada suatu bilangan, tidak termasuk angka 0 yang posisinya di sebelah kiri dari seluruh angka lain yang bukan 0. Angka penting digunakan untuk melambangkan derajat keakuratan. Semakin banyak angka penting yang dimiliki oleh suatu bilangan, semakin besar derajat keakuratan dari bilangan tersebut.

Pandang beberapa bilangan berikut: 84,015; 0,0063; 0,05600. Pada bilangan 84,015 terdapat 5 angka penting. Pada bilangan 0,0063 hanya terdapat 2 angka penting. Adapun pada bilangan 0,05600 terdapat 4 angka penting, karena dua angka 0 terakhir digunakan untuk menunjukkan keakuratan dari bilangan tersebut.

Berikut ini beberapa aturan untuk menentukan banyak angka penting:

- Semua angka bukan 0 merupakan angka penting. Sebagai contoh, 214 mempunyai 3 angka penting.
- Angka 0 yang terdapat di antara angka bukan 0 merupakan angka penting. Sebagai contoh, 603 mempunyai 3 angka penting.
- Pada bilangan desimal, semua angka 0 sebelum angka bukan 0 yang pertama bukan merupakan angka penting. Sebagai contoh, 0,006 hanya mempunyai 1 angka penting.
- Apabila suatu bilangan cacah sudah dibulatkan, angka 0 yang terletak di sebelah kanan dari angka bukan 0 terakhir bisa merupakan angka penting ataupun bukan merupakan angka penting, tergantung dari bilangan itu dibulatkan sampai ke berapa. Sebagai contoh, apabila dibulatkan sampai ribuan terdekat, 23000 mempunyai 2 angka penting (tiga angka 0 terakhir bukan merupakan angka penting). Apabila dibulatkan sampai ratusan terdekat, 23000 mempunyai 3 angka penting (dua angka 0 terakhir bukan merupakan angka penting). Apabila dibulatkan sampai puluhan terdekat, 23000 mempunyai 4 angka penting (angka 0 terakhir bukan merupakan angka penting).

Untuk melakukan pembulatan dari suatu bilangan sehingga mempunyai n angka penting yang ditentukan, kita mengikuti aturan berikut:

- Perhatikan nilai dari angka yang berada pada posisi ke- n , dimulai dari kiri ke kanan dari angka pertama yang bukan 0. Selanjutnya cek nilai angka pada posisi ke- $(n + 1)$ yang tepat berada di sebelah kanan angka ke- n .
- Apabila angka ke- $(n + 1)$ nilainya kurang dari 5, hapuskan angka ke- $(n + 1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya. Sebagai contoh, $2,04045 = 2,040$ (4 angka penting), $0,400127 = 0,400$ (3 angka penting).
- Apabila angka ke- $(n + 1)$ nilainya lebih dari atau sama dengan 5, tambahkan 1 ke nilai angka ke- n dan hapuskan angka ke- $(n + 1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya.

Contoh:

1. Tentukan banyaknya angka penting dari bilangan-bilangan berikut:

- | | |
|-----------|-----------------------------------|
| a. 0,0401 | d. 0,10005 |
| b. 3,1208 | e. 3,56780 |
| c. 0,0005 | f. 73000 (sampai ribuan terdekat) |

Penyelesaian:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a. 3 angka penting | d. 5 angka penting. |
| b. 5 angka penting | e. 6 angka penting. |
| c. 1 angka penting | f. 2 angka penting. |
2. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk yang mempunyai banyak angka penting seperti ditunjukkan:
- a. 0,003468; supaya mempunyai 3 angka penting.
 - b. 0,07614; supaya mempunyai 2 angka penting.
 - c. 14,408; supaya mempunyai 5 angka penting.
 - d. 28,7026; supaya mempunyai 4 angka penting.

Penyelesaian:

- a. Untuk menyatakan dalam bentuk yang mempunyai 3 angka penting, kita cek angka keempat dari kiri yang bukan 0. Ternyata angkanya adalah 8. Karena nilainya lebih dari 5, kita tambahkan 1 ke angka ketiga dari kiri yang bukan 0. Sehingga $0,003468 = 0,00347$ (sampai 3 angka penting).
- b. $0,07614 = 0,076$ (sampai 2 angka penting).
- c. $14,4089 = 14,409$ (sampai 5 angka penting).
- d. $28,7026 = 28,70$ (sampai 4 angka penting).

3. Estimasi (Penaksiran)

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menggunakan estimasi (penaksiran) apabila untuk memperoleh jawaban akhir yang pasti diperkirakan tidak memungkinkan ataupun tidak diperlukan. Estimasi sering menggunakan pembulatan, baik pembulatan ke bawah, pembulatan ke atas, ataupun pembulatan sampai n tempat desimal.

Secara umum, langkah-langkah untuk melakukan penaksiran adalah sebagai berikut:

- Selalu cari bilangan-bilangan yang nantinya akan memudahkan dalam melakukan perhitungan, misalnya satuan, puluhan, ratusan, atau ribuan. Sebagai contoh, $45,4 \times 95,72 \approx 45 \times 100$.
- Selalu ingat bilangan desimal sederhana yang ekuivalen dengan bilangan pecahan, misalnya $0,25 = \frac{1}{4}$, $0,5 = \frac{1}{2}$, $0,125 = \frac{1}{8}$.
- Dalam melakukan perhitungan, supaya hasil estimasinya mendekati jawaban sebenarnya, satu faktor dibulatkan ke atas dan satu faktor lain dibulatkan ke bawah. Contoh, $3578 \times 4127 \approx 3600(\uparrow) \times 4000(\downarrow)$.
- Untuk ekspresi berupa pecahan, bulatkan sampai ke bilangan yang mudah untuk dilakukan pembagian. Sebagai contoh, $\frac{18,52 \times 4,31}{1,79} \approx \frac{20 \times 4}{2}$.

Contoh :

1. Taksirlah hasil perhitungan berikut:

a. $59,67 - 24,265 + 11,32$

b. $58,75 \times 47,5 \div 44,65$

Penyelesaian:

a. Kita bulatkan 59,67 ke 60, kemudian 24,265 ke 20, dan 11,32 ke 10. Sehingga $59,67 - 24,265 + 11,32 \approx 60 - 20 + 10 = 50$.

b. Kita bulatkan 58,75 ke 60, kemudian 47,5 ke 50, dan 44,65 ke 40. Sehingga $58,75 \times 47,5 \div 44,65 \approx 60 \times 50 \div 40 = 75$.

2. Taksirlah hasil perhitungan berikut:

a. $26,5 + 19,85 - 8,21$

b. $7,56 \times 4,105$

c. $5015 \div 198$

Penyelesaian:

a. $26,5 + 19,85 - 8,21 \approx 27 + 20 - 8 = 39$

b. $7,56 \times 4,105 \approx 8 \times 4 = 32$

c. $5015 \div 198 \approx 5000 \div 200 = 25$

3. Taksirlah hasil perhitungan berikut sampai 1 angka penting:

a. $39,7 \times 1,61$

c. $\sqrt{39,7}$

b. $39,7 \div 1,61$

d. $\frac{1}{39,7}$

Penyelesaian:

a. $39,7 \times 1,61 \approx 40 \times 1,6 = 64$
 ≈ 60 (sampai 1 angka penting)

Keterangan

- 39,7 (punya 3 angka penting) dibulatkan menjadi 40 (punya 2 angka penting).
- 1,61 (punya 3 angka penting) dibulatkan menjadi 1,6 (punya 2 angka penting).
- 64 (punya 2 angka penting) dibulatkan menjadi 60 (punya 1 angka penting).

b. $39,7 \div 1,61 \approx 40 \div 1,6 = 25$
 ≈ 30 (sampai 1 angka penting)

c. $\sqrt{39,7} \approx \sqrt{36}$
 $= 6$ (sampai 1 angka penting)

Keterangan:

- 39,7 dibulatkan menjadi 36 (bilangan kuadrat terdekat)

$$\begin{aligned} \text{d. } \frac{1}{39,7} &\approx \frac{1}{40} = 0,025 \\ &\approx 0,03 \text{ (sampai 1 angka penting)} \end{aligned}$$

D. Aktivitas Belajar

Kegiatan 1.

1. Taksirlah nilai dari $\frac{4,19 \times 0,0309}{0,0222}$.
2. Taksirlah nilai dari $\frac{52,41 \times 0,044}{0,00118}$.
3. Taksirlah nilai dari $\sqrt{990}$.
4. Taksirlah nilai dari $\sqrt{\frac{8,05 \times 24,78}{1,984}}$.
5. Taksirlah nilai dari $\frac{7,94}{2,01}$ sampai 1 angka penting.
6. Taksirlah nilai dari $\frac{21,83 \times 0,498}{220,1}$ sampai 1 angka penting.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

Kegiatan 2.

1. Taksirlah nilai dari $\sqrt{136,05 - (2,985 + 7,001)^2}$ sampai 1 angka penting.
2. Pak Hafiz berpendapat bahwa 3,14 merupakan pendekatan yang lebih baik untuk nilai π daripada $\frac{22}{7}$. Apakah pendapat Pak Hafiz dapat dibenarkan? Berikan alasannya.
3. Jika $12,5 = 12,50$, jelaskan mengapa pengukuran sepanjang 12,50 meter lebih tepat dan akurat daripada pengukuran sepanjang 12,5 meter.

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Bulatkan 0,1235 sampai:
 - a. Sepersepuluhan terdekat.
 - b. Seperseratusan terdekat.
 - c. Seperseribuan terdekat.
2. Taksirlah hasil perhitungan berikut sampai 1 angka penting:
 - a. $\frac{65,8 \times 24,1}{32,3}$.
 - b. $\frac{65,8 \times \sqrt{24,1}}{3,23^2}$.
3. Taksirlah hasil perhitungan berikut sampai 1 angka penting:
 - a. $\frac{97,85 \times \sqrt{63,8}}{24,79}$
 - b. $\frac{4870 \times 1227 + 968 \times 4870}{1936 \times 0,49}$
4. Sebuah akuarium mini berbentuk balok berukuran panjang 21,35 cm, lebar 17,4 cm, dan tinggi 9,86 cm. akuarium tersebut diisi penuh dengan air. Tentukan volume air yang diperlukan untuk memenuhi akuarium mini tersebut. Nyatakan jawabannya dalam bentuk yang memuat 3 angka penting.
5. Keliling suatu lingkaran dinyatakan dalam rumus $K = 2\pi r$, adapun luas lingkaran tersebut dinyatakan dalam rumus $L = \pi r^2$, dengan r menyatakan jari-jari lingkaran. Tentukan:
 - a. Keliling lingkaran yang mempunyai panjang jari-jari 997 cm (nyatakan jawabannya dalam bilangan bulat terdekat).
 - b. Luas lingkaran yang mempunyai panjang jari-jari 11,09 cm (gunakan pendekatan nilai $\pi = 3,1416$ dan nyatakan jawabannya dalam bilangan bulat terdekat).

F. Rangkuman

Langkah-langkah untuk melakukan pembulatan terhadap suatu bilangan desimal sampai n tempat desimal adalah sebagai berikut:

- Perhatikan bilangan desimal yang akan dibulatkan.
- Jika bilangan tersebut akan dibulatkan sampai n tempat desimal, maka cek angka yang berada tepat pada posisi ke- $(n + 1)$ di sebelah kanan tanda koma.
- Apabila nilainya kurang dari 5 maka bulatkan ke bawah.
- Apabila nilainya lebih dari atau sama dengan 5 maka bulatkan ke atas.

Angka penting menunjuk ke angka-angka pada suatu bilangan, tidak termasuk angka 0 yang posisinya di sebelah kiri dari seluruh angka lain yang bukan 0. Angka penting digunakan untuk melambangkan derajat keakuratan. Semakin banyak angka penting yang dimiliki oleh suatu bilangan, semakin besar derajat keakuratan dari bilangan tersebut.

Beberapa aturan untuk menentukan banyak angka penting:

- Semua angka bukan 0 merupakan angka penting.
- Angka 0 yang terdapat di antara angka bukan 0 merupakan angka penting.
- Pada bilangan desimal, semua angka 0 sebelum angka bukan 0 yang pertama bukan merupakan angka penting.
- Apabila suatu bilangan cacah sudah dibulatkan, angka 0 yang terletak di sebelah kanan dari angka bukan 0 terakhir bisa merupakan angka penting ataupun bukan merupakan angka penting, tergantung dari bilangan itu dibulatkan sampai ke berapa.

Untuk melakukan pembulatan dari suatu bilangan sehingga mempunyai n angka penting yang ditentukan, kita mengikuti aturan berikut:

- Perhatikan nilai dari angka yang berada pada posisi ke- n , dimulai dari kiri ke kanan dari angka pertama yang bukan 0. Selanjutnya cek nilai angka pada posisi ke- $(n + 1)$ yang tepat berada di sebelah kanan angka ke- n .
- Apabila angka ke- $(n + 1)$ nilainya kurang dari 5, hapuskan angka ke- $(n + 1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya.

- Apabila angka ke- $(n + 1)$ nilainya lebih dari atau sama dengan 5, tambahkan 1 ke nilai angka ke- n dan hapuskan angka ke- $(n + 1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Belajar 1.

Kegiatan Pembelajaran 4

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan guru pembelajar dapat :

1. Menjelaskan tentang penyajian suatu deret dengan notasi sigma
2. Menggunakan notasi sigma untuk menentukan nilai suatu deret bilangan
3. Menjelaskan karakteristik pola dan pola bilangan
4. Menentukan pola untuk membentuk pola bilangan
5. Menjelaskan karakteristik barisan dan unsur-unsur barisan
6. Menentukan unsur-unsur barisan dan hubungan antara unsur-unsur tersebut
7. Menjelaskan karakteristik suatu deret dan unsur-unsur
8. Menentukan unsur-unsur deret dan hubungan antara unsur-unsur tersebut
9. Menentukan contoh-contoh konteks yang berkaitan dengan barisan dan deret bilangan dengan menggunakan pola bilangan

B. Indikator Pencapaian

1. Guru pembelajar mampu menyajikan suatu deret dengan notasi sigma
2. Guru pembelajar mampu menganalisis dan menggunakan notasi sigma dalam menentukan nilai suatu deret bilangan
3. Guru pembelajar mampu menganalisis dan menggunakan suatu pola dalam membentuk pola bilangan
4. Guru pembelajar mampu menentukan suatu unsur barisan jika diketahui unsur lainnya
5. Guru pembelajar mampu menggunakan barisan untuk membentuk suatu deret
6. Guru pembelajar mampu menyelesaikan permasalahan konteks sehari-hari yang berkaitan barisan dan deret dengan menggunakan konsep pola bilangan dengan menggunakan konsep pola bilangan bilangan.

C. Uraian Materi

Notasi Sigma dan Pola Bilangan

1. Notasi Sigma

Sigma adalah suatu huruf kapital Yunani yang berarti penjumlahan (*sum*) dan dinotasikan dengan Σ . Notasi sigma pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan yaitu Leonhard Euler pada tahun 1955. Penulisan dengan notasi sigma $\sum_{i=1}^{i=n} i$ mewakili penjumlahan suku penjumlahan indeks i dari suku penjumlahan pertama ($i=1$) sampai dengan suku penjumlahan ke- n ($i=n$).

Uraian singkat diatas menjadi modal untuk mempelajari definisi notasi sigma, berikut.

Definisi

Suatu deret $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots + u_n$ dapat ditulis dengan menggunakan **notasi sigma** sebagai

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i$$

Pada penulisan dengan notasi $\sum_{i=1}^n u_i$ dibaca sebagai penjumlahan suku-suku u_i , untuk $i = 1$ hingga $i = n$, dengan $i = 1$ disebut **batas bawah penjumlahan** dan $i = n$ disebut **batas atas penjumlahan**. Bilangan-bilangan asli dari 1 sampai dengan n disebut **wilayah penjumlahan**.

Sedangkan, suku penjumlahan yang ke- i atau u_i , disebut sebagai **variabel berindeks** dan huruf i bertindak sebagai **indeks** atau **penunjuk penjumlahan**.

Contoh

- a. Tuliskan dalam notasi sigma deret 100 bilangan asli yang berbentuk $1 + 5 + 9 + \dots + 397$.

Deret tersebut dapat disajikan dalam notasi sigma, dengan suku ke- i adalah $u_i = (4i - 3)$ dan i dari 1 sampai dengan $n=100$, yaitu $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^{100} (4i - 3)$.

- b. Tuliskan dalam notasi sigma deret n bilangan asli ganjil kuadrat yang pertama $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$

Deret tersebut dapat ditulis dalam notasi sigma dengan suku ke- i adalah $u_i = (2i-1)^2$ dan i dari 1 sampai n , yaitu $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n (2i - 1)^2$

Contoh

Tulislah deret-deret berikut ini dengan menggunakan notasi sigma.

a. $5 + 15 + 45 + \dots + 5 \cdot 3^{n-1}$

b. $2 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9}$

Jawab

- a. Deret $5 + 15 + 45 + \dots + 5 \cdot 3^{n-1}$; dapat ditulis dengan sigma dengan suku ke- i adalah $u_i = 5 \cdot 3^{i-1}$ dan i dari 1 sampai n .

Jadi, $5 + 15 + 45 + \dots + 5 \cdot 3^{n-1} = \sum_{i=1}^n 5 \cdot 3^{i-1}$

- b. Deret $2 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9} = \frac{2}{1} + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9}$ dapat ditulis dengan notasi sigma dengan suku ke- i adalah $u_i = \frac{2i}{2i-1}$ dan i dari 1 sampai 5.

Jadi, Deret $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{9}{10} = \sum_{i=1}^5 \frac{2i}{2i-1}$

2. Sifat-sifat Notasi Sigma

Untuk menghitung deret yang dinotasikan dengan notasi sigma dapat disederhanakan prosesnya dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma. Beberapa sifat notasi sigma, tersaji dalam sifat-sifat notasi sigma, berikut ini.

Sifat-sifat Notasi Sigma

Misalkan $\sum_{i=1}^n u_i$ suatu penyajian notasi sigma dan a, b suatu konstanta riil, maka berlaku

a. $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^n u_j$

b. $\sum_{i=1}^n a = n a$

c. $\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i) = a \sum_{i=1}^n u_i + b \sum_{i=1}^n v_i$

d. $\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i - b \cdot v_i) = a \sum_{i=1}^n u_i - b \sum_{i=1}^n v_i$

e. $\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i + b^2 \sum_{i=1}^n v_i^2$

f. $\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i - b \cdot v_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^n u_i^2 - 2ab \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i + b^2 \sum_{i=1}^n v_i^2$

Untuk memahami sifat-sifat tersebut, akan dibuktikan beberapa sifat, yaitu sifat b, c dan sifat e, sedangkan sifat yang lain, sebagai latihan.

Bukti

$$b. \sum_{i=1}^n a = a + a + a + \dots + a = n a$$

$$c. \sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i) = a \sum_{i=1}^n u_i + b \sum_{i=1}^n v_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i) &= \sum_{i=1}^n a \cdot u_i + \sum_{i=1}^n b \cdot v_i \\ &= a \sum_{i=1}^n u_i + b \sum_{i=1}^n v_i \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i) = a \sum_{i=1}^n u_i + b \sum_{i=1}^n v_i$$

$$\begin{aligned} e. \sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \{ (a \cdot u_i)^2 + 2 (a \cdot u_i)(b \cdot v_i) + (b \cdot v_i)^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ a^2 u_i^2 + 2ab u_i v_i + b^2 v_i^2 \} \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n u_i v_i + b^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n u_i v_i + b^2 \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Contoh :

Berdasarkan sifat-sifat notasi sigma, tentukan nilai dari notasi-notasi sigma berikut

a. $\sum_{i=1}^5 (4i - 1)$

b. $\sum_{i=1}^5 (2i + 3)^2$

Jawab

$$\begin{aligned} a. \sum_{i=1}^5 (4i - 1) &= 4 \sum_{i=1}^5 i - \sum_{i=1}^5 1 \\ &= 4 (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 5 \cdot 1 = 60 + 5 = 65 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \sum_{i=1}^5 (4i - 1) = 65.$$

b. Berdasarkan sifat notasi sigma, didapat

$$\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i + b \cdot v_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i + b^2 \sum_{i=1}^n v_i^2$$

dengan $n=5$, $a = 2$, $b = 3$, $u_i = i$ dan $v_i=1$ sehingga

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 (2i + 3)^2 &= 2^2 \sum_{i=1}^5 i^2 + 2 \cdot 2 \cdot (3) \sum_{i=1}^5 i + (3)^2 \sum_{i=1}^5 1^2 \\ &= 4 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + 12 (15) + 9 \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 55 + 90 + 9 = 319 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, nilai dari } \sum_{i=1}^5 (2i + 3) = 319$$

Contoh :

Diberikan deret aritmetika n bilangan, kemudian tuliskan dalam notasi sigma dan hitunglah jumlahan dari deret tersebut

a. $5 + 8 + 11 + \dots + (3n+2)$

b. $3 + 6 + 12 + \dots + 1536$

Jawab

a. Deret n bilangan asli pertama, $5 + 8 + 11 + \dots + (3n+2)$ dapat ditulis dengan notasi sigma dengan suku ke- i adalah $u_i = 3i + 2$, dari $i=1$ sampai $i=n$, yaitu $\sum_{i=1}^n (3i + 2)$

sehingga dapat ditulis $5 + 8 + 11 + \dots + (3n+2) = \sum_{i=1}^n (3i + 2)$

Deret $5 + 8 + 11 + \dots + (3n+2)$, dengan suku pertama $u_1 = a = 5$, $b=3$ dan $u_n = n$ sehingga didapat jumlah n suku-suku pertamanya adalah

$$S_n = \frac{1}{2} n (a + u_n) = \frac{1}{2} n (5 + (3n+2)) = \frac{1}{2} n (3n+7).$$

Jadi, dapat ditulis dalam notasi sigma

$$\sum_{i=1}^n (3i + 2) = \frac{1}{2} n (3n+7)$$

c. Deret $3 + 6 + 12 + \dots + 1536$ dapat ditulis dengan notasi sigma dengan suku ke- i adalah $u_i = 3 \cdot 2^{i-1}$, dari $i=1$ sampai $i=10$ (Anda cek), yaitu $\sum_{i=1}^n 3 \cdot 2^{i-1}$.

Jadi, dapat ditulis

$$3 + 6 + 12 + \dots + 1536 = \sum_{i=1}^n 3 \cdot 2^{i-1}$$

Deret $3 + 6 + 12 + \dots + 1536$, dengan suku pertama $u_1 = a = 3$, $r=2$ dan $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ sehingga didapat jumlah n suku-suku pertamanya adalah

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1}$$

Jadi, dapat ditulis dalam notasi sigma

$$3 + 6 + 12 + \dots + 1536 = S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3.069$$

Contoh :

Tentukan nilai $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$

Jawab

Berdasarkan sifat-sifat notasi sigma, didapat

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{Jadi, } \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

3. Pola Bilangan

Dalam mempelajari bilangan, ditemukan beberapa kumpulan bilangan yang memiliki ciri atau pola tertentu. Pola pada bilangan ini berupa aturan atau rumus yang digunakan dalam menentukan urutan atau letak suatu bilangan dari sekumpulan bilangan yang telah ditentukan.

Definisi

Pola bilangan adalah suatu **aturan tertentu** yang diberlakukan pada kumpulan bilangan

Suatu p... silkan
susunan bilangan yang berpola dalam himpunan tersebut.

Contoh :

Misalkan himpunan S, dengan $S = \{ 5, 9, 17, 13, 21 \}$. Diberikan pola bilangan pada S, sebagai berikut bilangan pertama adalah 5 dan bilangan berikutnya adalah empat lebih besar dari bilangan sebelumnya. Dengan menerapkan pola tersebut didapat susunan bilangan berpola dari S yaitu 5, 9, 13, 17, 21.

Contoh :

Dalam memberi nomor rumah di suatu jalan, ditentukan aturan yaitu, rumah yang terletak di sebelah kanan dari arah pintu gerbang harus memiliki nomor genap dan rumah yang berada di sebelah kiri harus bernomor ganjil. Aturan penomoran rumah tersebut membentuk susunan bilangan yang berpola, yaitu pola bilangan genap 2, 4, 6, ..., $2n$ dan pola bilangan ganjil 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$, dengan n bilangan asli. Pengaturan ini memberikan kemudahan dalam mencari suatu rumah, cukup dengan melihat genap atau ganjil nomor rumah yang dicari.

Untuk memudahkan dalam mengingat, jika memungkinkan suatu pola bilangan dalam himpunan bilangan diberi **nama** dan namanya disesuaikan dengan bilangan-bilangan penyusunnya.

Contoh :

- a. 1, 2, 3, ..., n , dinamakan pola n bilangan asli pertama
- b. 2, 4, 6, ..., $2n$ disebut pola n bilangan asli genap pertama.

Suatu pola dapat diperoleh dari pola bilangan yang telah ada sehingga didapat pola bilangan yang baru. Misalnya, pola bilangan asli genap pertama 2, 4, 6, ..., $2n$, dengan menerapkan aturan pada pola yang baru yaitu bilangan pertama adalah 2, dan bilangan ke- n berikutnya adalah jumlahan n bilangan sebelumnya, untuk $n=2, 3, \dots$ Aturan ini akan menghasilkan pola bilangan 2, 6, 12, ..., $n(n+1)$ dan dinamakan pola n bilangan persegi panjang pertama.

Coba Anda bentuk dari pola bilangan 1, 3, ..., $(2n-1)$ menjadi 1, 4, 9, ..., n^2 , yang disebut pola n bilangan persegi pertama.

4. Barisan Bilangan (sekuens)

Setiap pola yang diterapkan pada suatu himpunan bilangan akan membentuk suatu susunan bilangan yang memiliki pola. Barisan bilangan adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola tertentu. Pola yang dimaksud, ditentukan dari hasil membandingkan dua bilangan yang berurutan pada susunan bilangan tersebut dan hasilnya adalah tetap(konstan). Terdapat dua jenis pola bilangan yang didapat dari hasil selisih atau pembagian dari bilangan ke- n oleh bilangan ke- $(n-1)$, untuk n bilangan asli. Jika suatu susunan bilangan yang selisih dua bilangan yang berurutan adalah tetap disebut barisan aritmetika. Sedangkan, jika pembagian dua bilangan yang berurutan adalah tetap maka susunan bilangan tersebut disebut barisan geometri. Seperti halnya pola bilangan, suatu barisan bilangan juga dapat diberi **nama** sesuai dengan karakter pola bilangan yang membentuk barisan itu.

Beberapa contoh barisan bilangan dan namanya, sebagai berikut :

No.	Barisan Bilangan	Nama
1	1, 2, 3, 4, 5, ...	Barisan bilangan Asli

2	1, 3, 5, 7, 9, ...	Barisan bilangan Asli Ganjil
3	2, 4, 8, 16, 32, ...	Barisan bilangan berpangkat dari 2
4	1, 4, 9, 16, 25, ...	Barisan bilangan Persegi
5	1, 3, 6, 10, 15, ...	Barisan bilangan Segitiga
6	2, 6, 12, 20, 30, ...	Barisan bilangan Persegi Panjang

Table 1

Berdasarkan table 1, didapat barisan 1, 2 adalah barisan aritmetika dan barisan 3 adalah barisan geometri. Sedangkan barisan 4, 5, 6 adalah barisan selain keduanya dan dibahas pada akhir modul ini.

Pada penulisan suatu barisan, setiap bilangan yang membentuk barisan bilangan disebut **suku barisan** dan dinotasikan dengan u_i , dengan i adalah indeks ke- i . Setiap dua suku barisan dipisahkan dengan notasi “,” (koma). Indeks n pada u_n menunjukkan banyaknya suku dari barisan, sedangkan notasi u_n disebut **suku umum barisan** yang merupakan fungsi dengan daerah asalnya himpunan bilangan asli. Untuk n bilangan asli hingga maka barisan bilangannya disebut **barisan bilangan hingga**.

Secara umum, suatu barisan bilangan dapat disajikan dalam bentuk

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

dengan u_1 adalah suku ke-1, u_2 adalah suku ke-2, dan u_n adalah suku ke- n .

Contoh :

Tentukan rumus umum suku ke- n bagi barisan-barisan berikut ini, jika empat buah suku pertama diketahui sebagai berikut:

- a. 4, 6, 8, 10, ...
- b. 2, 4, 8, 16, ...
- c. 3, -3, 3, -3, ...

Jawab:

- a. Barisan 4, 6, 8, 10, ...; barisan dengan suku pertama $u_1 = 4$ dan selisih suku yang berurutan bernilai konstan sama dengan 2.

Jadi, $u_n = 2n + 2$

- b. Barisan 2,4,8,16, ...; dapat ditulis sebagai $(2)^1, (2)^2, (2)^3, (2)^4, \dots$; barisan dengan suku-sukunya sama dengan 2 dipangkatkan bilangan asli.

$$\text{Jadi } u_n = 2^n$$

- c. Barisan 3,-3,3,-3, ...; barisan dengan suku pertama $u_1 = 3$ dan perbandingan dua suku berurutan bernilai konstan sama dengan -1.

$$\text{Jadi } u_n = -3(-1)^n$$

Contoh :

Diberikan barisan bilangan yang rumus umum suku ke-n adalah $u_n = 7n - 4$. Tentukan suku pertama dan suku ke-10

Jawab

Berdasarkan definisi, diketahui bahwa suku ke-n adalah $u_n = 7n - 4$. Sehingga didapat suku pertama adalah $u_1 = 7 \cdot 1 - 4 = 3$ dan suku ke-10 adalah $u_{10} = 7 \cdot 10 - 4 = 67$.

Jadi, suku pertama dan suku ke-10 masing-masing adalah $u_1 = 3$ dan $u_{10} = 67$.

5. Deret Bilangan (*series*)

Dalam suatu barisan bilangan yang berhingga dapat ditentukan nilai dari jumlahan semua suku-suku barisannya. Deret adalah nilai dari hasil jumlahan beruntun suku-suku suatu barisan berhingga sehingga setiap barisan selalu dapat dibentuk deretnya.

Definisi

Misalkan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan suku-suku suatu barisan. Jumlah beruntun dari suku-suku barisan itu dinamakan sebagai **deret** dan dituliskan sebagai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Secara notasi sigma, suatu deret $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ dapat dituliskan sebagai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

Jika n merupakan bilangan asli berhingga maka deret itu dinamakan sebagai **deret berhingga** dan sedangkan jika n mendekati tak hingga maka disebut **deret tak hingga**.

Berdasarkan barisan pembentuknya, terdapat dua jenis deret yaitu Deret Aritmetika dan Deret Geometri. Deret Aritmetika dibentuk dari barisan aritmetika, sedangkan deret geometri dibentuk dari barisan geometri.

Contoh :

Tulislah dengan ringkas dan hitunglah nilai jumlahnya dari deret-deret berikut ini.

- Deret 10 bilangan asli ganjil yang pertama
- Deret 10 bilangan asli pangkat dari dua yang pertama

Jawab

- Diketahui deret 10 bilangan asli ganjil yang pertama.

Berdasarkan soal, diketahui bahwa $n=10$ sehingga dapat ditentukan bilangan ganjil ke-10 adalah $2n-1 = 19$. Dengan demikian, deret 10 bilangan asli ganjil pertama dapat ditulis

$$1 + 3 + 5 + \dots + 19 = \sum_{i=1}^{10} (2i - 1) = 10^2 = 100.$$

(ingat, bahwa deret n bilangan asli ganjil pertama didapat dari barisan bilangan persegi)

- Deret 10 bilangan asli pangkat dari 2 yang pertama dapat ditulis

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10} = \sum_{i=1}^{10} 2^i \text{ dan } \sum_{i=1}^{10} 2^i = 2046.$$

D. Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas pembelajaran pada kegiatan pembelajaran 1 ini, Anda diminta melakukan semua perintah/instruksi atau pertanyaan yang ada di bawah ini, secara individu atau kelompok kecil.

- Diberikan barisan

- $4 + 7 + 10 + 13 + \dots + (3n+1)$

- $1 + 4 + 16 + 64 + \dots + (4^{n-1})$

Tulis deret dalam bentuk notasi sigma dan tentukan hasil jumlahan tersebut

2. Diberikan notasi sigma, berikut

a. $\sum_{i=1}^n (6i - 1)$

b. $\sum_{i=1}^n i(2i + 4)^2$

Dengan menggunakan sifat-sifat dalam notasi sigma, tentuk bentuk paling sederhana dalam notasi sigma

3. Diberikan susunan bilangan

a. 2, 4, 6, 8, 10, 12

c. 1, 4, 7, 10, 13, 17

b. 10, 5, 0, -5, -10, -15

d. -3, 3, 6, 9, 12, 15, 18

Tentukan pola pada susunan bilangan di atas dan buatlah dua buah susunan bilangan yang berpola

4. Diberikan himpunan $A = \{ 2, 8, 5, 17, 11, 20, 14 \}$, $B = \{ 1, 5, 17, 13, 9, 24, 20 \}$, $C = \{ 8, 4, 12, -8, -4, 0 \}$

Buatlah suatu pola pada A, B dan C sehingga terbentuk susunan pola bilangan

5. Misalkan diberikan susunan bilangan berikut

a. 2, 6, 10, 14, 18, 22

c. 13, 8, 3, -2, -7, -12

a. 81, 27, 9, 3, $1, \frac{1}{3}$

d. 5, -10, 20, 40, -80

Tentukan susunan bilangan yang merupakan barisan dan tentukan unsur- unsur barisannya

6. Misalkan diberikan barisan bilangan berikut

a. 2, 7, 12, 17, 22, 27

c. 3, 11, 18, 25, 32, 39

b. 32, 16, 8, 4, 2, $1, \frac{1}{2}$

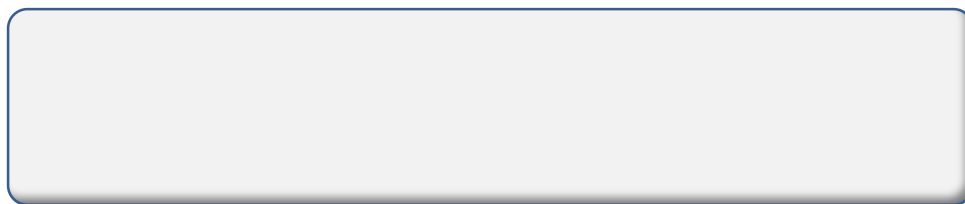
d. 5, -5, 5, -5, 5, -5, 5

Tentukan deret bilangan yang dibentuk dari barisan bilangan di atas

7. Misalkan X memiliki anak 4 yang masih sekolah. X memberi uang saku kepada yang terbesar Rp. 20.000, uang saku akan kedua 0.5 kali uang saku anak pertama, uang saku anak yang adalah 0.5 kali uang saku kakaknya.

a. Modelkan masalah ini dalam barisan bilangan

b. Tentukan total uang yang harus disiapkan X untuk memberi uang saku kepada anaknya dengan deret bilangan

**E.****F. Latihan/Kasus/Tugas**

1. Hitunglah $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$
2. $H = \{5, 2, 7, 4, 9, 6\}$ diterapkan pola, jika anggota H ganjil dikurangi 2 dan jika genap ditambah 2. Himpunan berpola apakah susunan bilangan yang terbentuk
3. Barisan terdiri atas enam bilangan, jumlahan suku ke-2 dan suku ke-4 adalah 16. Sedangkan jumlahan suku ke-3 dan suku ke-6 adalah 25. Tentukan barisan tersebut.
4. Seorang ibu memberikan uang saku kepada 4 anaknya. Anak yang bungsu mendapat uang saku Rp. 100.000,00 perminggu. Untuk uang saku kakak-kakaknya adalah $\frac{3}{2}$ kali uang saku adiknya langsung. Berapa uang yang harus disediakan ibu tersebut untuk memberi uang saku kepada anak-anaknya setiap minggunya.
5. Suatu sisi-sisi segitiga siku-siku (dalam satuan cm) membentuk barisan. Misalkan barisan itu dibentuk deret memiliki nilai 60 cm. Hitung panjang sisi-sisi dari segitiga tersebut.

G. Rangkuman

1. Notasi Sigma ($\sum_{i=1}^n i$) adalah suatu notasi yang mewakili suatu penjumlahan berurutan dari $i=1$ ke $i=n$. Notasi sigma mampu memberikan kemudahan dan kesederhanaan.
2. Sifat-sifat notasi sigma merupakan penurunan sifat dasar yang sangat membantu dalam bekerja dengan notasi sigma.

3. Misalkan $\sum_{i=1}^n u_i$ suatu notasi sigma dan a, b suatu konstanta riil, maka berlaku
 - $\sum_{i=1}^n a = n a$
 - $\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i \mp b \cdot v_i) = a \sum_{i=1}^n u_i + b \sum_{i=1}^n v_i$
 - $\sum_{i=1}^n (a \cdot u_i \mp b \cdot v_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i + b^2 \sum_{i=1}^n v_i^2$
4. Pola bilangan adalah suatu aturan tertentu yang diberlakukan pada kumpulan bilangan
5. Suatu pola yang diberlakukan pada kumpulan bilangan akan menghasilkan suatu susunan bilangan berpola
6. **Barisan** adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola
7. Barisan memiliki ciri khusus yang diperoleh dari hasil perbandingan dua suku yang berturutan
8. Barisan mempunyai **selisih** atau **perbandingan** terhadap dua suku yang berturutan adalah tetap.
9. Misalkan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan suku-suku suatu barisan. Jumlah beruntun dari suku-suku barisan itu dinamakan sebagai **deret**

H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Belajar 1.

Kegiatan Pembelajaran 5

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari paket ini, diharapkan guru pembelajar dapat :

1. Menyebutkan karakteristik suatu barisan aritmetika
2. Menentukan rumus umum unsur-unsur dari barisan aritmetika
3. Membentuk suatu barisan aritmetika melalui proses penyisipan k bilangan pada dua suku yang berturutan dari suatu barisan aritmetika
4. Menentukan suatu unsur barisan aritmetika dalam unsur-unsur barisan aritmetika yang lain
5. Menyebutkan karakteristik suatu deret aritmetika
6. Menentukan rumus umum unsur-unsur dari deret aritmetika
7. Menentukan suatu unsur deret aritmetika dalam unsur-unsur deret aritmetika yang lain
8. Menyelesaikan soal-soal teoritis dan permasalahan konteks dengan menggunakan konsep barisan atau deret aritmetika

B. Indikator Pencapaian

1. Guru pembelajar mampu menjelaskan definisi barisan aritmetika, suku pertama u_1 , beda b dan suku ke- n u_n dari barisan aritmetika
2. Guru pembelajar mampu menentukan rumus umum suku ke- n u_n , jika suku pertama dan beda b diketahui
3. Guru pembelajar mampu menentukan rumus umum suku tengah u_t jika diberikan barisan aritmetika yang memiliki banyak suku-sukunya ganjil
4. Guru pembelajar mampu menentukan suatu unsur dari suku pertama atau beda b atau suku ke- n u_n atau suku tengah u_t atau banyak suku n , jika paling sedikit dua unsur lainnya diketahui
5. Peserta diklat atau pembaca mampu menemukan rumus suku tengah pada barisan aritmetika yang memiliki banyak unsur ganjil
6. Guru pembelajar mampu menemukan rumus umum beda b^1 dari barisan aritmetika baru yang dibentuk melalui penyisipan k bilangan pada dua suku berturutan dari suatu barisan aritmetika

7. Guru pembelajar mampu menjelaskan definisi dan membentuk deret aritmetika jika diketahui barisan aritmetiknya
8. Guru pembelajar mampu menentukan rumus umum jumlahan S_n suatu deret aritmetika
9. Guru pembelajar mampu menjelaskan definisi barisan aritmetika, suku pertama u_1 , beda b dan suku ke- n u_n dari barisan aritmetika
10. Guru pembelajar mampu menyelesaikan soal-soal dan permasalahan konteks sehari-hari dengan menggunakan konsep barisan dan deret aritmetika

C. Uraian Materi

Barisan dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Untuk mengawali pembahasan, coba Anda amati barisan bilangan berikut.

a. 2, 5, 8, 11, 14

b. 16, 11, 6, 1, -4

Setiap barisan di atas memiliki karakter/ciri tertentu yaitu selisih setiap suku yang berurutan pada barisan soal a. adalah 3, sedangkan untuk soal b. adalah -5. Besarnya (nilai) selisih dua suku yang berurutan disebut **beda** dan dinotasikan dengan huruf **b**. Barisan bilangan yang selisih dua suku yang berurutannya adalah b disebut **Barisan Aritmetika**.

Definisi

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ disebut **barisan aritmetika** jika untuk sebarang nilai n berlaku hubungan

$$u_n - u_{n-1} = b$$

dengan b adalah suatu tetapan (konstanta).

Mudah difahami bahwa barisan bilangan asli, barisan bilangan asli ganjil, barisan bilangan asli genap pertama semuanya merupakan barisan aritmetika.

a. Rumus Umum Suku Ke- n pada Barisan Aritmetika

Ciri khusus suatu barisan aritmetika adalah selisih dua suku berurutannya adalah tetap (konstan). Akibatnya, jika diketahui salah satu suku dan nilai bedanya maka

suku yang lain dalam barisan aritmetika dapat ditentukan, termasuk rumus umum suku ke- n .

Untuk menentukan rumus umum suku ke- n , dapat ditentukan sebagai berikut. Misalkan diberikan suatu barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b , maka didapat tabel

Suku ke- i	Notasi	nilainya	Pola
pertama	u_1	a	$a + (1-1)b$
kedua	u_2	$a + b$	$b + (2-1)b$
ketiga	u_3	$a + 2b$	$a + (3-1)b$
...
ke- n	u_n	$a + (n-1)b$	$a + (n-1)b$

Table 2

Dengan memperhatikan pola dari suku-suku barisan maka didapat rumus suku umum ke- n yaitu $u_n = a + (n-1)b$. Secara lengkap disajikan rumus umum suku ke- n , sebagai berikut.

Rumus

Misalkan suatu barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda b . Rumus umum **suku ke- n** dari barisan aritmatika itu ditentukan oleh

$$u_n = a + (n - 1)b$$

b. Sifat-sifat suku ke- n pada barisan aritmetika

Suku umum ke- n untuk barisan aritmetika, yaitu u_n memiliki beberapa sifat yang terkait dengan n dan beda b . Sifat-sifat tersebut, antara lain :

- 1) Untuk setiap $n \in$ bilangan asli berlaku $u_n - u_{n-1} = b$ (b beda).

Secara umum, berlaku jika p, q bilangan asli dan $p > q$ maka diperoleh

$$u_p - u_q = (p-q)b$$

- 2) Untuk setiap p, q bilangan asli dan $p > q$ maka berlaku $u_p = \frac{1}{2}(u_{p-q} + u_{p+q})$

Bukti

Untuk setiap bilangan asli k, l dan $k > l$ maka didapat

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(u_{p-q} + u_{p+q}) &= \frac{1}{2}(a + ((p-q-1))b + a + (p+q-1)b) \\ &= \frac{1}{2}(2a + (2p-2)b) = \frac{1}{2}(2a + 2(p-1)b) = (a + (p-1)b) = u_p\end{aligned}$$

Akibat dari sifat 2), dalam barisan aritmetika berlaku $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)$, $u_5 = \frac{1}{2}(u_4 + u_6)$, $u_8 = \frac{1}{2}(u_7 + u_9)$.

Contoh :

Misalkan A adalah barisan bilangan asli kurang dari 51. Tentukan banyaknya bilangan asli yang memenuhi kriteria berikut

- Bilangan asli yang habis dibagi 5
- Bilangan asli yang habis dibagi 6
- Bilangan asli yang habis dibagi 5 dan tidak habis dibagi 6

Jawab

- Himpunan bilangan asli A yang habis dibagi 5 adalah $B = \{ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 \}$ sehingga banyaknya anggota B adalah 10.
Berdasarkan barisan aritmetika B, didapat $a=5$, $b=5$ dan suku terakhir adalah 50 sehingga berlaku $u_n = a + (n-1)b \Leftrightarrow 50 = 5 + (n-1)5 \Leftrightarrow 50 = 5 + 5n - 5 \Leftrightarrow 50 = 5n \Leftrightarrow n = 10$. Artinya, banyaknya suku barisan aritmetika adalah 10.
- Himpunan bilangan asli A yang habis dibagi 6 adalah $C = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 \}$ sehingga banyaknya anggota C adalah 8.
- Himpunan bilangan asli yang habis dibagi 5 dan tidak habis dibagi 6 adalah $D = B \setminus C = \{ 5, 10, 15, 20, 25, 35, 40, 45, 50 \}$ sehingga banyaknya anggota D adalah 9.

Contoh :

Misalkan diketahui suku ke-10 dan suku ke-25 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 74 dan 179.

- Tentukan suku pertama dan beda barisan itu.
- Tentukan suku keberapa, jika diketahui bernilai 249.

Jawab

- Misalkan suku umum ke-n dirumuskan dengan $u_n = a + (n-1)b$ maka didapat suku ke-10 adalah $u_{10} = 74 \Rightarrow a + 9b = 74$ (*)

$$\text{Suku ke-25 adalah } u_{25} = 168 \Rightarrow a + 24b = 179 \quad (**)$$

Dari hasil (*) dan (**), didapat $a = 7$ dan $b = 11$

Jadi, suku pertama $a = 11$ dan beda $b = 7$.

- b. Berdasarkan hasil a, didapat $a = 11$ dan $b = 7$ sehingga rumus umum suku ke- n adalah $u_n = a + (n - 1)b = 11 + 7(n - 1)$.

Karena $u_n = 238$ maka berlaku $11 + 7(n - 1) = 249$

$$\Leftrightarrow 7(n - 1) = 249 - 11 \Leftrightarrow 7n = 238 + 7 = 245 \Leftrightarrow n = 35$$

Jadi, suku barisan yang bernilai 249 adalah suku ke-35.

Contoh :

Misalkan seutas tali dipotong menjadi 50 potong yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika. Jika panjang tali potongan yang ke-10 dan panjang tali potongan ke-25 berturut turut adalah 74 cm dan 179 cm.

- Tentukan panjang tali potongan pertama dan selisih setiap dua potongan tali yang berurutan.
- Tentukan potongan tali ke berapa, jika diketahui panjang tali tersebut 249 cm.

Jawab

- a. Berdasarkan soal, diketahui bahwa permasalahan tersebut merupakan masalah barisan aritmatika, dengan panjang potongan tali pertama adalah a dan selisih panjang dua tali yang berturutan adalah beda b .

Misalkan rumum umum suku ke- n dituliskan $u_n = a + (n - 1)b$ maka didapat

$$\text{suku ke-10 adalah } u_{10} = 74 \Rightarrow a + 9b = 74 \quad (*)$$

$$\text{Suku ke-25 adalah } u_{25} = 168 \Rightarrow a + 24b = 179 \quad (**)$$

Dari hasil (*) dan (**), didapat $a = 11$ dan $b = 7$

Jadi, panjang tali pertama adalah $a = 11$ cm dan beda $b = 7$ cm.

- b. Berdasarkan hasil a, didapat suku pertama $a = 11$ cm dan $b = 7$ cm sehingga suku ke- n adalah $u_n = a + (n - 1)b = 11 + 7(n - 1)$.

Karena $u_n = 249$ maka berlaku $11 + 7(n - 1) = 249$

$$\Leftrightarrow 7(n - 1) = 249 - 11 \Leftrightarrow 7n = 238 + 7 = 245$$

$$\Leftrightarrow n = 35.$$

Jadi, potongan tali yang memiliki panjang 249 cm adalah potongan tali ke-35.

Contoh :

Misalkan suatu keluarga A memiliki lima anak, dengan umur yang membentuk barisan aritmetika. Umur yang paling tua adalah 24 tahun dan umur anak yang ketiga adalah 14 tahun. Tentukan umur masing-masing anak dari keluarga A tersebut.

Jawab

Untuk menyelesaikan masalah ini, pergunakan sifat dari suku umum u_n . Ingat, bahwa $u_p - u_q = (p-q) b$ dan $u_p = \frac{1}{2}(u_{p-1} + u_{p+1})$.

Misalkan barisan aritmetika dari umur dari anak adalah $x - 2b, x - b, x, x + b, x + 2b$. (mengapa barisan aritmetikanya dimisalkan begitu?).

Karena anak kelima berumur 24 tahun dan anak ketiga berumur 14 tahun maka berlaku

$$x = \frac{1}{2}(x - 2b + x + 2b) = \frac{1}{2}(24 + 14) = \frac{1}{2} 38 = 19.$$

Di sisi lain, didapat $u_5 - u_3 = 2b \leftrightarrow 24 - 14 = 2b \leftrightarrow b = 5$.

Dengan demikian, diperoleh suku pertama $u_1 = x - 2b = 19 - 2 \cdot 5 = 9$, suku kedua $u_2 = x - b = 19 - 5 = 14$, dan suku keempat $u_4 = 19$, beda $b=5$ serta barisan aritmetika yang berbentuk adalah 9, 14, 19, 24.

c. Suku Tengah pada Barisan Aritmetika

Suku-suku dalam barisan aritmetika adalah terpolanya sehingga dapat ditentukan suku tengahnya. Suku tengah suatu barisan aritmetika dapat ditentukan, jika banyaknya suku dalam barisan tersebut adalah ganjil.

Coba, Anda perhatikan beberapa barisan aritmetika berikut, kesimpulan apa yang Anda peroleh?

- Barisan aritmetika 4, 7, 10, 13, 16 maka suku tengahnya 10
- Barisan aritmetika 5, 8, 11, 14 maka tidak memiliki suku tengahnya

Barisan a mempunyai suku tengah karena banyak suku-sukunya adalah ganjil, sedangkan pada barisan b tidak memiliki suku tengah karena banyaknya suku-suku adalah genap.

Untuk barisan aritmetika dengan banyaknya suku adalah ganjil, maka suku tengahnya dapat ditentukan, sebagaimana rumus di bawah ini.

Rumus

Misalkan suatu barisan aritmatika dengan banyak suku ganjil $(2k - 1)$, dengan k bilangan asli lebih dari dua. **Suku tengah barisan aritmatika** itu adalah suku ke- k atau u_k dan rumus suku tengah u_k ditentukan oleh hubungan:

$$u_k = \frac{1}{2} (u_1 + u_{2k-1})$$

Contoh :

Suatu barisan aritmetika, diketahui suku pertama adalah 5, bedanya 3 dan suku terakhir adalah 107. Tentukan beda b dan suku tengahnya

Jawab

Berdasarkan soal, didapat suku pertama $a=5$, beda $b=3$ dan suku terakhir $u_n=107$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} u_n &= a + (n - 1)b \leftrightarrow 107 = 5 + (n - 1)3 \\ \leftrightarrow 107 &= 5 + 3n - 3 \leftrightarrow 105 = 3n \leftrightarrow n = 35. \end{aligned}$$

Karena $n=35$ (ganjil) maka diperoleh suku tengah,

$$u_k = \frac{1}{2} (u_1 + u_{35}) = \frac{1}{2} (5 + 107) = \frac{1}{2} \cdot 112 = 56.$$

Karena $(2k-1) = 35$ maka didapat $k = 18$ sehingga suku tengahnya adalah $u_{18} = 56$.

(Anda juga bisa menentukan nilai k dahulu baru suku tengahnya).

Contoh :

Suatu barisan aritmetika, memiliki suku tengah adalah 57, suku terakhirnya adalah 112, dan suku ke-20 sama dengan 97.

- Tentukan suku pertama dan beda barisan aritmetika itu.
- Tentukan banyak suku pada barisan aritmetika itu.

Jawab

- a. Berdasarkan soal, diketahui suku tengah $u_k = 57$, suku terakhir $u_{2k-1} = 112$.

Dengan memakai rumus suku tengah $u_k = \frac{1}{2}(u_1 + u_{2k-1})$, diperoleh:

$$57 = \frac{1}{2}(u_1 + 112) \Leftrightarrow 114 = u_1 + 112 \Leftrightarrow u_1 = a = 2.$$

Suku ke-20 adalah 97, sehingga

$$u_{20} = a + 19b = 97 \Leftrightarrow 2 + 19b = 97 \Leftrightarrow 19b = 97 - 2 = 95 \Leftrightarrow b = 5$$

Jadi, suku pertama $a = 2$ dan beda $b = 5$.

- b. Karena suku terakhirnya adalah 112, maka berlaku

$$u_{2k-1} = a + (2k - 2)b = 112 \Leftrightarrow 2 + (2k - 2)5 = 112$$

$$\Leftrightarrow 2 + 10k - 10 = 112 \Leftrightarrow 10k = 112 + 10 - 2 = 120$$

$$\Leftrightarrow k = 12.$$

Jadi, banyaknya suku adalah $(2k-1) = 2 \cdot 12 - 1 = 23$.

Contoh :

Seorang guru kelas memilih lima siswa yang berprestasi dalam kelas. Kelima siswa adalah rangking 5, rangking 4, ..., rangking 1. Sebagai wujud rasa bangga dan bahagia, guru memberikan hadiah dan banyaknya hadiahnya membentuk barisan aritmetika. Hadiah diwujudkan dalam bentuk kupon, semakin tinggi prestasinya semakin banyak kupon yang didapat. Jika anak yang rangking 3 memperoleh 19 kupon dan rangking 2 memperoleh 22 kupon. Berapa banyak kupon yang diterima anak rangking 1.

Jawab

Misalkan kelima siswa dimisalkan dengan $a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b$. (kenapa?),

Jika anak ranking 3 mendapat 19 kupon maka berlaku

$$u_3 = a = 19, \text{ sehingga } a=19.$$

Untuk rangking 2 mendapat 22, sehingga berlaku

$$u_2 = a - b \Leftrightarrow 22 = 19 + b \Leftrightarrow b = 3.$$

Berdasarkan hasil $a=19$ dan $b=3$, didapat suku-suku barisannya, yaitu

$$u_5 = a - 2b = 19 - 2 \cdot 3 = 13,$$

$$\begin{aligned}
 u_4 &= a - b = 19 - 3 = 16, \\
 u_3 &= a = 19, \\
 u_3 &= a + b = 19 + 3 = 22 \\
 u_1 &= a + 2b = 19 + 2 \cdot 3 = 25.
 \end{aligned}$$

Jadi, didapat barisan aritmetiknya yaitu 13, 16, 19, 22, 25 dengan beda $b=3$.

d. Sisipan pada Barisan Aritmetika

Misalkan di antara dua bilangan real x dan y (dengan $x \neq y$) akan disisipkan sebanyak k buah bilangan, yaitu x_1, x_2, \dots, x_k , dengan k bilangan asli. Bilangan-bilangan $x, x_1, x_2, \dots, x_k, y$ membentuk suatu barisan aritmatika. Misalkan suku pertama a dan bedanya b maka dapat ditulis

$$a=x, x_1=x+b, x_2=a+2b, \dots, x_k=x+kb, y \quad (*)$$

Karena $(*)$ membentuk barisan aritmetika, maka selisih dua suku yang berurutan adalah b . Dengan menggunakan dua buah suku yang terakhir diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned}
 y - (x + kb) &= b \Leftrightarrow y - x - kb = b \\
 \Leftrightarrow kb + b &= y - x \Leftrightarrow (k + 1)b = y - x \\
 \Leftrightarrow b &= \frac{y-x}{k+1}.
 \end{aligned}$$

Hasil terakhir, merupakan rumus beda b untuk barisan baru.

Rumus

Diantara dua bilangan x dan y disisipkan sebanyak k buah bilangan sehingga bilangan-bilangan semula dengan bilangan-bilangan yang disisipkan membentuk **barisan aritmatika**. Nilai **beda** aritmatika yang terbentuk dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan

$$b = \frac{y-x}{k+1}$$

x dan $y \in$ bilangan real ($x \neq y$) dan $k \in$ bilangan asli.

Perluasan

Misalkan suatu barisan aritmetika dengan banyak unsur n , suku pertama a , beda b sehingga dapat divisualkan

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan aritmetika yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru, dengan suku pertama a' , beda b' dan banyak unsur n' , maka, diperoleh hubungan, sebagai berikut :

- Suku pertama $a' = a$,
- beda $b' = \frac{b}{k+1}$
- Banyak unsur $n' = n + (n-1)k$

Contoh :

Di antara bilangan 3 dan 33 disisipkan 5 buah bilangan, sehingga bilangan-bilangan semula dengan bilangan-bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmetika. Tentukan beda dari barisan aritmetika yang terbentuk.

Jawab:

Dari soal, dapat ditetapkan bahwa $x = 3$, $y = 33$ dan $k = 5$. Dengan menggunakan rumus didapat:

$$b = \frac{y-x}{k+1} = \frac{33-3}{5+1} = \frac{30}{6} = 5$$

Jadi, beda barisan aritmetika yang terbentuk adalah $b = 5$ dan barisan aritmetiknya adalah 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33..

2. Deret Aritmetika

Telah diketahui bahwa deret adalah jumlahan beruntun suku-suku suatu barisan. Jika suku-suku yang dijumlahkan itu adalah suku-suku barisan aritmetika, maka deret yang terbentuk disebut adalah **deret aritmetika**. Dengan demikian, setiap barisan aritmetika dapat dibentuk deret aritmetika.

Definisi

Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmatika, maka

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$
dinamakan sebagai **deret aritmatika**.

Jika banyak suku n suatu deret adalah besar maka untuk menentukan nilai deretnya dibutuhkan rumus. Sedangkan untuk n kecil maka nilai suatu deret dapat dihitung langsung. Perhatikan ilustrasi berikut.

Misalkan akan ditentukan nilai deret aritmetika 10 bilangan asli pertama secara langsung. Misalkan x adalah nilai deret, sehingga

$x = 1 + 2 + 3 + \dots + 10$ dan menjumlahkan dengan x lagi, tetapi penulisannya dibalik. Anda perhatikan tabel di bawah.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+
x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
$2x$	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	

Jika dijumlahkan setiap sukunya maka didapat hasilnya 11 sehingga terdapat 10 suku yang bernilai 11. Dari sisi kiri diperoleh $2x$ sehingga didapat hubungan

$$2x = 10 \cdot 11 \leftrightarrow x = \frac{1}{2} 10 \cdot 11 = 55.$$

Akan ditentukan rumus umum jumlah n suku pertama suatu deret, sebagai berikut. Karena suatu deret merupakan penjumlahan suku-suku, maka jumlah dari suku-suku deret mempunyai nilai tertentu. **Jumlah n suku pertama deret** aritmetika dilambangkan dengan S_n , dan S_n ditentukan oleh:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Substitusi $u_1 = a$, $u_2 = a + b$, $u_3 = a + 2b$, ..., $u_{n-2} = u_n - 2b$, dan $u_{n-1} = u_n - b$; diperoleh

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \dots + (u_n - 2b) + (u_n - b) + u_n \quad \dots\dots\dots [*]$$

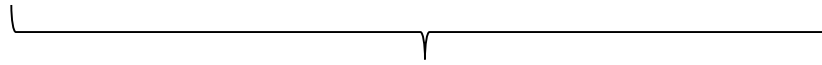
Jika urutan suku-suku penjumlahan pada persamaan [*] dibalik diperoleh:

$$S_n = u_n + (u_n - b) + (u_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \quad \dots\dots\dots [**]$$

Jumlahkan masing-masing ruas pada persamaan [*] dengan persamaan [**] sehingga diperoleh:

S_n	a	$a+b$	$a+2b$	$a+3b$...	u_n-2b	u_n-b	u_n	+
S_n	u_n	u_n-b	u_n-2b	u_n-3b	...	$a+2b$	$a+b$	a	
$2S_n$	$a+u_n$	$a+u_n$	$a+u_n$	$a+u_n$...	$a+u_n$	$a+u_n$	$a+u_n$	

$$2 S_n = (a + u_n) + (a + u_n) + (a + u_n) + \dots + (a + u_n) + (a + u_n) + (a + u_n)$$



penjumlahan n suku dengan masing-masing sukunya adalah $(a + u_n)$

$$\leftrightarrow 2 S_n = n (a + u_n) \leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} n (a + u_n).$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, S_n dirumuskan sebagai berikut

Rumus

Jika suatu deret aritmatika

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

maka **Jumlah n suku pertama** adalah

$$S_n = \frac{1}{2} n (a + u_n)$$

dengan n = banyak suku, a = suku pertama, dan u_n = suku ke- n

a. Sifat-sifat S_n pada Deret Aritmatika

Beberapa sifat dasar dari Jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah sebagai berikut..

- 1) Untuk tiap $n \in$ bilangan asli berlaku hubungan $S_n - S_{n-1} = u_n$ (suku ke- n).

Secara umum, berlaku jika untuk p, q bilangan asli dan $p > q$ maka berlaku

$$S_p - S_q = u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$$

- 2) Jika u_k adalah suku tengah dari barisan aritmetika yang mempunyai banyak unsur ganjil maka jumlah n bilangan pertama pada deret aritmetika adalah $S_n = n \cdot u_k$

Contoh :

Hitunglah jumlah deret aritmetika $6 + 9 + 12 + \dots + 123$

Jawab:

Untuk menghitung jumlah deret pada soal di atas, perlu ditentukan terlebih dulu banyak suku atau n melalui hubungan $u_n = a + (n - 1)b$.

Karena $6 + 9 + 12 + \dots + 123$, maka didapat $a = 6$, $b = 3$, dan $u_n = 123$ sehingga

$$123 = 6 + (n - 1)3 \leftrightarrow 123 = 3n + 3 \leftrightarrow 3n = 120 \leftrightarrow n = 40.$$

$$S_{40} = \frac{40}{2} (a + u_{40}) = 20 (6 + 123) = 2580.$$

Jadi, jumlah deret aritmetika $6 + 9 + 12 + \dots + 123$ adalah $S_{40} = 2580$.

Contoh :

Tentukan n , jika diketahui $\frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)} = \frac{116}{115}$

Jawab

Ingat, rumus pada deret aritmatika bahwa

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n+1) \text{ dan } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

$$\frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)} = \frac{116}{115} \leftrightarrow \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{116}{115}$$

$$\leftrightarrow 115 (n^2 + n) = 116 n^2 \leftrightarrow 115 n^2 + 115 n = 116 n^2$$

$$\leftrightarrow n^2 - 115 n = 0 \leftrightarrow n (n-115) = 0 \leftrightarrow n=0 \text{ atau } n= 115.$$

Jadi, diperoleh $n=115$.

Contoh :

Pada bulan Januari 2015, Ilham menabung sebesar Rp. 500.000,00. Pada bulan-bulan berikutnya, Ilham menabung sebesar Rp 750.000,00; Rp 1.000.000,00; Rp 1.250.000,00; demikian seterusnya sampai bulan Desember 2015. Berapa jumlah seluruh tabungan Ilham sampai dengan akhir tahun 2015 itu?

Jawab

Uang yang ditabung Ilham pada bulan Januari, Febuari, Maret, April, sampai dengan bulan Desember 2015 dapat disajikan dalam tabel berikut.

Bulan	Januari	Febuari	Maret	April	...	Desember
Tabungan	500.000	750.000	1000.000	1250.000

Berdasarkan tabel diatas, jumlah tabungan Ilham sampai dengan akhir tahun 2015 dapat ditulis $500.000 + 750.000 + 1000.000 + 1250.000 + \dots + u_{12} \cdot (*)$

Penyajian (*) adalah model matematika yang berbentuk deret aritmatika, dengan suku pertama $a = 500.000$ dan beda $b = 250.000$.

Suku kedua belas ditentukan melalui hubungan:

$$u_{12} = a + 11b = 500.000 + 11(250.000) = 3.250.000$$

Jumlah dua belas suku pertama deret aritmatika itu ditentukan dengan hubungan

$$S_{12} = \frac{12}{2}(a + u_{12}) = 6(500.000 + 3.250.000) = 2.250.000$$

Jadi, jumlah tabungan Ilham sampai akhir tahun 2015 adalah Rp. 22.250.000,00.

Contoh :

Diberikan n barisan bilangan 2, 5, ..., $(3n+1)$.

- Tentukan jumlah n suku-suku dari barisan tersebut
- Buktikan bahwa $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{1}{2}n(3n+1)$ dengan menggunakan metode induksi matematika.

Jawab

- Karena barisan bilangan 2, 5, 8, ..., $(3n-1)$ adalah barisan aritmatika, dengan $a=2$ dan $b=3$ maka $2+5+8+\dots+(3n-1)$ membentuk deret aritmatika sehingga didapat jumlah n suku pertamanya adalah S_n , dengan

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b) = \frac{1}{2}n(2 \cdot 2 + (n-1)3) = \frac{1}{2}n(3n+1)$$

- Untuk membuktikan dengan metode induksi matematika,

Akan dibuktikan

$$2+5+8+\dots+(3n-1) = \frac{1}{2}n(3n+1), \text{ untuk setiap } n \text{ bilangan asli}$$

- Langkah 1, akan dibuktikan berlaku untuk $n=1$.

Untuk $n=1$ didapat hasil sebelah kiri adalah 2 dan sebelah kanan $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 2$ sehingga $2 = 2$. Jadi, rumus berlaku untuk $n=1$.

- Langkah 2, yaitu jika berlaku untuk $n=k$ maka berlaku untuk $n=k+1$.

Karena berlaku untuk $n=k$ maka didapat

$$2+5+8+\dots+(3k-1) = \frac{1}{2} k (3k+1) \dots (*)$$

Untuk $n=k+1$, maka

$$\begin{aligned} 2+5+8+\dots+(3k-1) + (3(k+1)-1) &= \{2+5+8+\dots+(3k-1)\} + (3(k+1)-1) \\ &= \frac{1}{2} k(3k+1) + (3k+2) = \frac{1}{2} (3k^2 + k + 6k + 4) = \frac{1}{2} (3k^2 + 7k + 4) \\ &= \frac{1}{2} (k+1)(3k+4) = \frac{1}{2} (k+1)(3(k+1)+1), \text{ berlaku untuk } n=k+1. \end{aligned}$$

Jadi terbukti, jika rumus berlaku untuk $n=k$ maka rumus berlaku untuk $n=k+1$.

Berdasarkan hasil langkah 1 dan langkah 2, maka menurut metode induksi matematika, $2+5+8+\dots+(3n-1) = \frac{1}{2} n(3n+1)$, untuk setiap n bilangan asli.

D. Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas pembelajaran pada kegiatan pembelajaran 2 ini, Anda diminta melakukan semua perintah/instruksi atau pertanyaan yang ada di bawah ini, secara individu atau kelompok kecil.

1. Diberikan barisan-barisan bilangan, sebagai berikut

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| a. 3, 7, 11, 15, 19, ... | c. -9, -6, -3, 0, 3, ... |
| b. 5, 10, 15, -10, -5, ... | d. -7, -2, 3, 7, 11, .. |

Selidikilah susunan bilangan yang membentuk barisan aritmetika dan tentukan beda b da rumus umum suku ke- n

2. Buktikan, jika p, q asli, $p > q$ maka $u_p = \frac{1}{2} (u_{p+q} + u_{p-q})$ dan $u_p - u_q = (p-q) b$
 Dan gunakan untuk menghitung $u_7 - u_2$ dan u_9 dari barisan aritmetika berikut

a. 5, 11, 17, 23, 29, ...

b. -4, -1, 2, 5, 8, ...

3. Tulis cara menentukan suku tengah dari barisan aritmetika yang mempunyai banyak suku adalah ganjil. Mulai dari 3 suku, 5 suku, 7 suku dan secara umum $(2k-1)$ suku. Buktikan bahwa suku tengah adalah $\frac{1}{2}$ dari jumlahan suku pertama dan suku terakhir.

4. Suatu barisan aritmetika, diketahui jumlahan suku ke-3 dan suku ke-7 adalah 42, sedangkan jumlahan suku ke-5 dan suku ke-10 adalah 62.

- a. Tentukan suku pertama a , beda b dan rumus suku ke- n .
 b. Jika diketahui banyaknya suku adalah 11 maka tentukan suku ke-11 dan suku tengahnya

5. Misalkan antara bilangan 2 dan 14 disisipkan 3 bilangan sehingga bilangan awal dan bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmetika. Buktikan bahwa barisan aritmetika yang terbentuk adalah 2, 5, 8, 11, 14, dengan beda $b = 3$.

- a. Jika 2 diganti x , 14 diganti y dan banyak bilangan yang disisipkan adalah k maka buktikan bahwa $b = \frac{(y-x)}{k+1}$

- b. Misalkan suatu barisan aritmetika dengan banyak unsur n , suku pertama a , beda b sehingga dapat divisualkan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan aritmetika yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru, dengan suku pertama a' , beda b' dan banyak unsur n' , maka, Buktikan hubungan berikut

- a. Suku pertama $a' = a$,
 b. Beda $b' = \frac{b}{k+1}$
 c. Banyak unsur $n' = n + (n-1)k$

6. Tulis dan jelaskan pengertian deret aritmetika, cara membentuk deret aritmetika, jumlah n suku pertama dan sifat-sifat S_n serta berikan dua contoh deret aritmetika.

7. Diberikan suatu deret yang memiliki rumus sebagai berikut.

- a. $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4n-1) = n(2n+1)$
 b. $-7 - 2 + 3 + 8 + \dots + (5n-12) = \frac{1}{2}n(5n-19)$

Buktikan rumus untuk jumlah n suku pertama dari deret di atas dengan rumus S_n dan menggunakan Induksi Matematika

8. Berikanlan dua contoh konteks yang berkaitan barisan atau deret aritmetika dan selesaikanlah.

E. Latihan/Kasus/Tugas

- Diberikan suatu barisan aritmetika 17, 23, 29, ...
 - Tentukan rumus umum suku ke- n
 - Jika $u_m = 611$ maka tentukan m
- Suatu barisan aritmetika yang banyaknya suku ganjil adalah $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2k-1}$. Jumlah suku ke-2 dan suku ke-6 adalah 30 dan jumlah suku ke-3 dan suku ke-7 adalah 38. Tentukan suku pertama a , suku terakhir dan suku tengahnya.
- Suatu barisan aritmetika terdiri 4 suku dengan suku pertama $a=5$ dan beda $b=16$. Jika setiap dua unsur yang berturutan disisipkan masing-masing 3 bilangan sehingga bilangan pada barisan aritmetika dan bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru. Tentukan barisan aritmetika yang terbentuk
- Andi akan membuat 5 segitiga yang berukuran beda dengan menggunakan kawat berkualitas baik. Keliling kelima segitiga siku-siku tersebut membentuk barisan aritmetika. Jika panjang keliling segitiga siku-siku yang terkecil adalah 12 cm. Tentukan kawat yang dibutuhkan untuk membuat segitiga tersebut.

5. Seseorang memiliki lima orang anak yang semuanya sekolah. Jarak rumah ke sekolah membentuk barisan matematika. Jarak rumah ke sekolah, untuk anak ke-5 adalah 1,2 km, anak ke-4 adalah 2,4 km. untuk selanjutnya selalu jarak rumah ke sekolahnya adalah jarak rumah ke sekolahan adiknya ditambah 1,2 km. jika, semua anak menggunakan jasa taksi tarif argo adalah : kilometer pertama Rp. 10.000, kilometer ke-2 Rp.20.000, dan seterusnya maka hitunglah uang yang harus disediakan keluarga tersebut untuk biaya taksi.

F. Rangkuman

1. **Barisan Aritmetika** adalah suatu **barisan** yang selisih dua suku yang berturutan adalah tetap
2. Penulisan unsur dalam barisan aritmetika dinotasikan dengan a =suku ke-1 adalah u_1 , selisih tetap disebut beda, yaitu b dan rumus umum suku ke- n adalah u_n , dengan **$u_n = a + (n-1)b$** .
3. Sifat-sifat dasar rumus suku ke- n adalah $u_n - u_{n-1} = b$ dan $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)$.
4. Secara umum, berlaku jika p, q asli, $p > q$ maka

$$u_p = \frac{1}{2}(u_{p+q} + u_{p-q}) \text{ dan } u_p - u_q = (p-q)b.$$

5. Barisan Aritmetika memiliki suku tengah jika banyaknya suku adalah **ganjil**.
6. Suku tengah, u_k adalah setengah dari jumlahan suku pertama dan suku terakhir, dinotasikan dengan $u_k = \frac{1}{2}(u_1 + u_{2k-1})$.
7. Pembentukan barisan baru dapat dilakukan dengan proses penyisipan pada dua bilangan x, y . Hubungan antara banyaknya bilangan yang disisipkan k , beda b barisan yang terbentuk adalah

$$b = \frac{(y-x)}{k+1}$$

8. Secara umum, misalkan suatu barisan aritmetika u_1, u_2, \dots, u_n dengan beda b . Jika setiap dua unsur yang berturutan disisipkan k bilangan sehingga barisan yang semula dan bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmetika baru dengan beda b^1 dan banyaknya unsur baru n^1 maka diperoleh hubungan

a. $a' = a$

b. $b^1 = \frac{b}{(k+1)}$

c. $n^1 = n + (n-1)k$

9. Jumlahan suku-suku secara beruntun dari suatu barisan dinamakan Deret. Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ barisan aritmetika maka $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ suatu Deret Aritmetika

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Belajar 1.

Kegiatan Pembelajaran 6

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari paket ini, diharapkan guru atau peserta diklat dapat:

1. Menyebutkan karakteristik suatu barisan geometri
2. Menentukan rumus umum unsur-unsur dari barisan geometri
3. Membentuk suatu barisan geometri melalui proses penyisipan k bilangan pada dua suku yang berturutan dari suatu barisan geometri
4. Menentukan suatu unsur barisan geometri dalam unsur-unsur barisan geometri yang lain
5. Menyebutkan karakteristik suatu deret geometri
6. Menentukan rumus umum unsur-unsur dari deret geometri
7. Menentukan suatu unsur deret geometri dalam unsur-unsur deret geometri yang lain
8. Menyebutkan karakteristik suatu deret geometri tak hingga
9. Menentukan jumlahan suatu deret geometri tak hingga
10. Menyebutkan karakteristik suatu barisan selain barisan aritmetika maupun barisan geometri
11. Menentukan rumus umum suku ke- n dari barisan selain barisan aritmetika maupun geometri
12. Menyelesaikan soal-soal teoritis dan permasalahan konteks sehari-hari dengan menggunakan konsep barisan atau deret geometri

B. Indikator Pencapaian

1. Guru pembelajar mampu menjelaskan definisi barisan geometri, suku pertama u_1 , rasio r dan suku ke- n u_n dari barisan geometri
2. Guru pembelajar mampu menentukan rumus umum suku ke- n u_n , jika suku pertama dan rasio r diketahui
3. Guru pembelajar mampu menentukan rumus umum suku tengah u_k , jika diberikan barisan geometri yang memiliki banyak suku-sukunya ganjil

4. Guru pembelajar mampu menentukan suatu unsur dari suku pertama atau rasio r atau suku ke- n u_n atau suku tengah u_k atau banyak suku n , jika paling sedikit dua unsur lainnya diketahui
5. Guru pembelajar mampu menemukan rumus umum rasio r^1 dari barisan geometri baru yang dibentuk melalui penyisipan k bilangan pada dua suku berturutan dari suatu barisan geometri
6. Guru pembelajar mampu menjelaskan definisi dan membentuk suatu deret geometri jika diketahui barisan geometrinya
7. Guru pembelajar mampu menentukan rumus umum jumlahan S_n suatu deret geometri
8. Guru pembelajar mampu menjelaskan syarat-syarat suatu deret geometri tak hingga yang konvergen
9. Guru pembelajar mampu menentukan nilai limit jumlah suatu deret geometri tak hingga yang konvergen
10. Guru pembelajar mampu menyebutkan definisi suatu barisan berderajat dua dan barisan berderajat tiga
11. Guru pembelajar mampu menentukan rumus umum suku ke- n dari barisan berderajat dua, barisan berderajat tiga dan barisan yang berlandaskan geometri
12. Guru pembelajar mampu menyelesaikan soal-soal dan permasalahan konteks sehari-hari dengan menggunakan konsep barisan dan deret geometri

C. Uraian Materi

Barisan, Deret Geometri dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri

1. Barisan Geometri

Sebagai ilustrasi awal, untuk memahami ciri pada barisan geometri, perhatikan barisan-barisan bilangan berikut ini.

a. $1, 2, 4, \dots, 64$

b. $27, 9, 3, 1, \dots, \frac{1}{27}$

Pada barisan a, terlihat bahwa $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \dots = \frac{64}{32} = 2$, sedangkan barisan b, diperoleh juga $\frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \dots = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Setiap barisan bilangan tersebut di atas, memiliki ciri tertentu, yaitu **perbandingan dua suku yang berurutan mempunyai nilai yang tetap**, yaitu masing-masing adalah 2 dan $\frac{1}{3}$.

- b. Di dunia bisnis, khususnya bagian pemasaran, berkembang pesat sistem multi level marketing (MLM). Sistem kerjanya mudah dan terkesan ringan tapi keuntungan yang dijanjikan besar. Setiap orang hanya memasarkan kepada dua orang bawahannya (*downlines*) sehingga satu orang menawarkan kepada dua orang, kemudian dua orang menawarkan kepada empat orang dan seterusnya. Sistem MLM akan menghasilkan barisan bilangan 1, 2, 4, ..., 2^n .

Selanjutnya, suatu barisan bilangan yang perbandingan dua suku berurutan adalah tetap dinamakan **barisan geometri**. Sedangkan perbandingan dua suku yang berurutan disebut **rasio** dan dinotasikan huruf **r**.

Definisi

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ disebut **barisan geometri**, jika untuk sebarang nilai n bilangan asli berlaku hubungan:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = r$$

dengan **r** (rasio) adalah suatu tetapan (konstanta).

Contoh :

Tentukan rasio r dari barisan geometri berikut

a. $2, 6, 18, \dots, 2 \cdot 3^n$

b. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$

Jawab

a. Barisan $2, 6, 18, \dots, 2 \cdot 3^n$ adalah barisan geometri dengan rasio $r = \frac{6}{2} = 3$.

b. Barisan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ adalah barisan geometri dengan rasio $r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

a. Rumus Suku Umum Ke-n pada Barisan Geometri

Misalkan suatu barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio adalah r , maka suku-suku barisan dapat ditulis $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$.

Berdasarkan pola dari suku-suku barisan geometri di atas, maka rumus suku ke- n dapat didefinisikan, sebagai berikut.

Rumus

Misalkan suatu barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r . Rumus suku umum ke- n dari barisan geometri itu ditentukan oleh :

$$u_n = a r^{n-1}$$

b. Sifat-sifat Suku ke-n pada Barisan Geometri

Berdasarkan rumus suku ke- n suatu barisan geometri, diperoleh sifat-sifat, sebagai berikut

- 1) Rumus umum suku ke- n adalah $u_n = a r^{n-1}$ merupakan **fungsi eksponen** dari n yang tidak mengandung suku konstanta
- 2) Untuk setiap n bilangan asli berlaku $\frac{u_n}{u_{n-1}} = r$ (rasio)

Secara umum, jika p, q bilangan asli, $p > q$ berlaku

$$\frac{u_p}{u_q} = \frac{ar^{p-1}}{ar^{q-1}} = r^{(p-1)-(q-1)} = r^{p-q}$$

- 3) Untuk setiap p, q bilangan asli, $p > q$ berlaku

$$u_p^2 = u_{p+q} \cdot u_{p-q}$$

Bukti :

$$u_{p+q} \cdot u_{p-q} = a r^{p+q-1} \cdot a r^{p-q-1} = a^2 r^{2p-2} = (ar^{p-1})^2 = u_p^2$$

Akibatnya, berlaku

$$u_2^2 = u_3 \cdot u_1, u_3^2 = u_4 \cdot u_2 = u_5 \cdot u_1, \text{ dan seterusnya.}$$

Contoh :

Tentukan suku pertama a , rasio r , dan suku ke-10 pada barisan-barisan geometri berikut ini.

a. 3, 9, 27, 81, ...

b. 8, -4, 2, -1, ...

Jawab

a. Diketahui barisan geometri 3, 9, 27, 81, ... ,

Dari soal, diperoleh suku pertama $a = 3$, rasio $r = \frac{9}{3} = 3$; suku kesepuluh $u_{10} = ar^9$
 $= 3 (3)^9 = 59049$

b. Diketahui barisan geometri 8, -4, 2, -1, ...

Menurut soal, didapat suku pertama $a = 8$, rasio $r = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$; suku kesepuluh u_{10}
 $= ar^9 = 8 \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{1}{64}$

Contoh :

Misalkan terdapat 3 bilangan membentuk barisan geometri dengan suku pertama adalah 3 dan hasil kali ketiga sukunya adalah 81.

Tentukan rasio dan barisan geometrinya.

Jawab

Misalkan barisan geometrinya adalah ar^{-1} , a , ar . Karena diketahui suku pertama $u_1 = ar^{-1} = 3$ sehingga $3r = a$. Dari sisi lain, hasil kali ketiga suku 81 sehingga $ar^{-1} \cdot a \cdot ar = 81 \Leftrightarrow a^3 = 81 = 3^3 \Leftrightarrow a = 3$.

Suku ketiga $u_3 = ar = 3 \Leftrightarrow 3 = 3r \Leftrightarrow r = 1$.

Jadi, diperoleh suku pertama adalah 1, suku kedua adalah 3 dan suku ketiga adalah 81, dengan rasio $r = 1$.

Contoh :

Diketahui suku ke-3 suatu barisan geometri sama dengan 45, sedangkan suku ke-5 sama dengan 405. Tentukan rasio r yang positif dan suku ke-10 dari barisan geometri itu.

Jawab

Berdasarkan soal, diketahui bahwa suku ketiga $u_3 = 45$, suku kedua $u_5 = 405$

Rasio dapat ditentukan dengan menghitung $\frac{u_5}{u_3} = \frac{405}{45} = 9$ dan $\frac{u_5}{u_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = r^2$. Dengan demikian, didapat $r^2 = 9$ sehingga rasio yang positif adalah $r = 3$. Dengan mensubstitusikan $r = 3$ pada u_3 diperoleh

$$u_3 = ar^2 \leftrightarrow 45 = a \cdot 3^2 = 9a \leftrightarrow a = 5.$$

Suku umum ke- n ditentukan dengan rumus

$$u_n = ar^{n-1} \leftrightarrow u_n = 5 (3)^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1}$$

Suku ke-10, adalah $u_{10} = ar^9 = 5 \cdot 3^9 = 5 \cdot 19683 = 98415$.

Jadi, rasio $r=3$ dan suku ke-10 adalah $u_{10} = 98415$.

Contoh :

Berdasarkan hasil penelitian, tahun 2010-2015, angka atau tingkat pertumbuhan penduduk di suatu daerah pemukiman baru mencapai 10% per tahun dan tingkat pertumbuhan penduduk ini tetap. Jika jumlah penduduk awal tahun 2010 adalah 1.000.000 jiwa tentukan jumlah penduduk pada awal tahun 2016.

Jawab

Misalkan jumlah penduduk awal tahun 2010 adalah $A_1=1.000.000$ jiwa dan jumlah penduduk pada awal tahun ke- n adalah A_n . Dengan tingkat pertumbuhan 10% = $\frac{10}{100} = 0,1$ maka

- Jumlah penduduk pada awal tahun 2011 (tahun ke-2) adalah A_2 :

$$A_2 = A_1 + 0,1A_1 = A_1(1 + 0,1) = (1,1)A_1$$

- Jumlah penduduk pada tahun 2012 (tahun ke-3) adalah A_3 :

$$A_3 = A_2 + 0,1A_2 = A_2(1 + 0,1) = (1,1)A_2 = (1,1)^2 A_1$$

Secara sama, didapat $A_5 = (1,1)^4 A_1$ dan diperoleh suatu barisan geometri, 1.000.000, $(1,1)(1.000.000)$, $(1,1)^2(1.000.000)$, ..., $(1,1)^{n-1}(1.000.000)$, dengan $a = A_1$, $r = 1,1$ dan suku ke- n adalah u_n . Jumlah penduduk pada tahun 2016 adalah suku ke-5, yaitu $u_5 = a r^{n-1} = 1.000.000 (1,1)^4 = 1.464.100$ jiwa.

a. Suku Tengah pada Barisan Geometri

Secara umum, misalkan barisan geometri $u_1, \dots, u_k, \dots, u_{2k-1}$; sehingga banyak suku adalah $2k-1$ (ganjil) dan suku tengahnya adalah u_k .

$$\text{Suku tengah } u_k = a r^{k-1} = \sqrt{a^2 r^{2(k-1)}} = \sqrt{a \cdot a r^{(2k-2)}} = \sqrt{a \cdot a r^{(2k-1)-1}} = \sqrt{u_1 \cdot u_{(2k-1)}}$$

Jadi, suku tengahnya adalah

$$u_k = \sqrt{u_1 \cdot u_{2k-1}}$$

Berdasarkan penemuan fakta di atas, suku tengah dari suatu barisan geometri, dinotasikan u_k dapat ditentukan sebagai berikut :

Rumus

Suatu barisan geometri dengan banyak suku adalah **ganjil** ($2k-1$), dengan k anggota bilangan asli lebih dari dua. **Suku tengah barisan geometri** yang dinotasikan u_k adalah suku ke- k dan rumusnya ditentukan oleh hubungan

$$u_k = \sqrt{u_1 \cdot u_{2k-1}}$$

Contoh :

Diberikan barisan geometri $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, 128$. Jika diketahui banyaknya suku pada barisan geometri ini adalah ganjil maka tentukan

- suku tengahnya u_k dan k
- banyaknya suku barisan geometri tersebut

Jawab

- a. Barisan geometri $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, 128$. Suku pertama $a = u_1 = \frac{1}{8}$, rasio $r = 2$ dan suku terakhir $u_{2k-1} = 128$.

Dengan menggunakan rumus suku tengah $u_k = \sqrt{u_1 \cdot u_{2k-1}}$, diperoleh

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 128} = \sqrt{16} = 4. \text{ Menurut hasil a), diperoleh } u_k = a r^{k-1} = \frac{1}{8} 2^{k-1} = 4 \leftrightarrow$$

$$2^{k-1} = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5 \leftrightarrow k = 5+1 = 6$$

Jadi didapat $k = 6$.

- b. Banyaknya suku barisan ini adalah $(2k-1) = (2 \cdot 6 - 1) = 12 - 1 = 11$.

c. Sisipan pada Barisan Geometri

Misalkan suatu barisan geometri dengan banyak unsur n , suku pertama a , rasio r sehingga dapat divisualkan

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan geometri yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan geometri yang baru,

$$a = u_1 \underbrace{x_1 \dots x_k}_{k} u_2 \underbrace{x_1 \dots x_k}_{k} u_3 \dots u_{n-2} \underbrace{x_1 \dots x_k}_{k} u_{n-1} \underbrace{x_1 \dots x_k}_{k} u_n$$

dengan suku pertama a' , rasio r' , dan banyak unsur n' maka diperoleh hubungan, sebagai berikut :

- Suku pertama $a' = a$,
- Rasio $r' = \sqrt[k+1]{r}$
- Banyak unsur $n' = n + (n-1)k$

Contoh

Dua bilangan 3 dan y disisipi lima bilangan sehingga membentuk barisan geometri dan suku tengahnya adalah $u_4 = 24$.

- Tentukan rasio r dari barisan yang terbentuk.
- Tentukan bilangan y dan suku beberapa?

Jawab

- a. Misalkan barisan geometri adalah $3, x_1, \dots, x_5, y$, dengan y suku terakhir barisan dan $k=5$. Karena diketahui $u_4 = 24$ dan $u_1 = 3$ sehingga

$$\frac{u_4}{u_1} = r^3 \leftrightarrow \frac{24}{3} = 8, \text{ didapat } r = 2.$$

- b. Karena disisipkan 5 bilangan, menurut rumus, diperoleh rasio r , yaitu

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{3}} = \sqrt[6]{\frac{y}{3}} \leftrightarrow 2^6 = \frac{y}{3} \leftrightarrow y = 192.$$

Karena suku tengahnya $u_4 = 24$ maka didapat $k=4$ sehingga $(2k-1) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$.

2. Deret Geometri

Sebagaimana, pendefinisian deret aritmetika, bahwa deret geometri dibentuk dari barisan geometri. Artinya, suatu barisan geometri dapat dibentuk deret geometrinya. Definisi Deret Geometri, divisualkan sebagai berikut

Definisi

Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan suku-suku barisan geometri maka $u_1 + u_2 + u_3 \dots + u_n$ dinamakan **deret geometri**

Misalkan jumlah n suku pertama dari deret geometri dilambangkan dengan S_n maka didapat $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \leftrightarrow S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ (*)

Kalikan kedua ruas pada persamaan (*) dengan r , diperoleh

$$r S_n = r (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}) \quad (**)$$

Kurangkanlah masing-masing ruas pada (*) dan (**) sehingga didapat

$$\begin{aligned} S_n - r S_n &= a - ar^n \leftrightarrow (1 - r^n) S_n = a (1 - r^n) \\ \leftrightarrow S_n &= \frac{a (1 - r^n)}{(1 - r)}. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, $r S_n - S_n$ didapat $S_n = \frac{a (r^n - 1)}{(r - 1)}$

Rumus

Jumlah n suku pertama suatu deret geometri $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ ditentukan dengan

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

atau

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},$$

untuk $r \neq 1$, dengan **n, a, r** masing-masing adalah banyaknya data, suku pertama dan rasio

b. Sifat-sifat S_n pada Deret Geometri

Jumlah n suku pertama deret geometri yang dinotasikan S_n , mempunyai sifat-sifat khusus, yaitu :

- 1) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ atau $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ merupakan **fungsi eksponen** dari n yang memuat suku tetapan $\frac{a}{1-r}$ atau $\frac{a}{r-1}$
- 2) Untuk tiap n bilangan asli, berlaku hubungan $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Contoh :

Diberikan suatu deret geometri $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$. Tentukan jumlah dari delapan suku pertama deret geometri tersebut.

Jawab

Berdasarkan soal, didapat suku pertama $a = 6$, rasio $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ sehingga jumlah n

$$\text{suku pertama } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{6(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6(1-(\frac{1}{3})^n)}{\frac{2}{3}} = 9(1-(\frac{1}{3})^n), \quad r \neq 1.$$

Jumlah delapan suku pertama adalah S_8 , dengan

$$S_8 = \frac{6[1-(\frac{1}{3})^8]}{1-\frac{1}{3}} = 8,99 \text{ (sampai 2 angka desimal)}$$

(Coba Anda kerjakan dengan rumus $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ dan bandingkan hasilnya)

Contoh :

Sepotong kawat mempunyai panjang 124 cm. kawat ini dipotong menjadi 5 bagian sehingga panjang potongan-potongannya membentuk barisan geometri dengan panjang potongan kawat yang paling pendek sama dengan 4cm. Tentukan panjang masing-masing potongan kawat yang didapat.

Jawab

Misalkan panjang potongan-potongan kawat berturut-turut adalah u_1, u_2, u_3, u_4 , dan u_5 membentuk barisan geometri dengan suku pertama $a = 4 \text{ cm}$ dan rasio r .

Jumlah suku-suku barisan geometri itu membentuk deret geometri dengan jumlah sama dengan panjang kawat.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 &= \text{panjang kawat} \leftrightarrow \frac{a(1-r^5)}{(1-r)} = 124 \\ \leftrightarrow \frac{4(1-r^5)}{(1-r)} &= 124 \leftrightarrow 1 - r^5 = 31(1 - r) \leftrightarrow r^5 - 31r + 30 = 0 \end{aligned}$$

Solusi persamaan ini adalah $r = 2$, maka suku ke-5 adalah $u_2 = ar^1 = 4 \cdot (2)^1 = 8$.

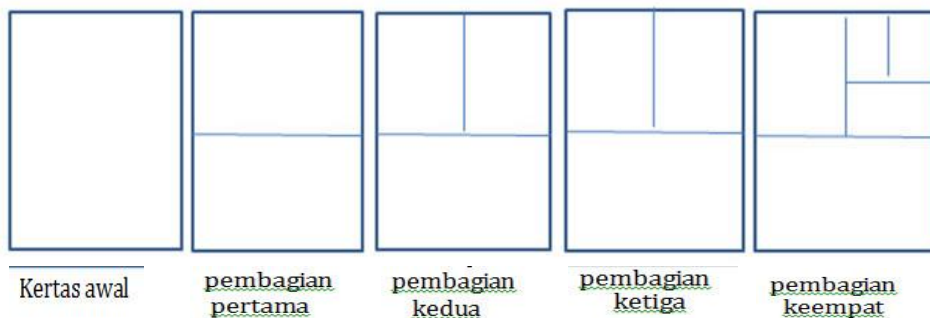
Dengan cara yang sama didapat $u_3 = 16$, $u_4 = 32$ dan $u_5 = 64$

Jadi, barisan geometri yang didapat adalah 4, 8, 16, 32, 64.

c. Deret Geometri Tak Hingga

Sebelum masuk materi secara konseptual, pengertian tentang deret geometri tak hingga, lebih baik diilustrasikan pada contoh konteks. Perhatikan ilustrasi berikut.

Misalkan satu lembar kertas berbentuk persegi. Kemudian kertas tersebut dibagi menjadi dua, kemudian salah satu bagian tadi, dibagi menjadi dua bagian, dan seterusnya. Sebagai visualisasi proses pembagian kertas, sebagai berikut



Proses pembagian tersebut dapat diulangi terus menerus sampai tak hingga kali. Pada pembagian pertama didapat $\frac{1}{2}$ bagian, pembagian kedua $\frac{1}{4}$ bagian, yang ketiga $\frac{1}{8}$ bagian, dan seterusnya. Hasil dari pembagian ini, diperoleh hubungan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

Peragaan yang sederhana ini, sebenarnya menjelaskan pengertian jumlah deret geometri tak hingga.

Secara teoritis, dijelaskan sebagai berikut.

Berdasarkan definisi, deret geometri dapat ditulis

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}.$$

Sedangkan, jumlah n suku pertama dari deret geometri itu ditentukan oleh

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}, \text{ untuk } r < 1$$

Sekarang, jika banyaknya suku-suku penjumlahan deret geometri mendekati tak hingga, maka deret geometri semacam ini dinamakan **deret geometri tak hingga**.

Selanjutnya, penulisan suatu deret geometri tak hingga adalah

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

Jumlah dari deret geometri tak hingga dinotasikan dengan S dan ditulis

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Maknanya, S diperoleh dari S_n dengan proses limit, untuk n mendekati tak hingga.

Selanjutnya, nilai $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ditentukan dengan menggunakan teorema limit sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a r^n}{(1-r)} \\ &= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan terakhir, diketahui bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ditentukan oleh ada atau tidaknya $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$.

Selanjutnya, ada dua kemungkinan nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$, yaitu

1. Jika $|r| < 1$ atau $-1 < r < 1$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. Akibatnya, diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \cdot 0 \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{(1-r)}$$

Deret geometri tak hingga semacam ini dikatakan **mempunyai limit jumlah** atau **konvergen**. Limit jumlah ini dilambangkan dengan S , sehingga diperoleh

$$S = \frac{a}{(1-r)}.$$

Sedangkan, untuk $|r| \geq 1$ atau $-1 \leq r$ atau $r \geq 1$ dapat ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \pm \infty \text{ sehingga diperoleh } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \cdot \pm \infty$$

$$\leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$$

Deret geometri tak hingga semacam ini dikatakan **tidak mempunyai limit jumlah** atau **divergen**.

Definisi

Deret geometri tak hingga $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ dikatakan

1. **Mempunyai limit jumlah** atau konvergen jika dan hanya jika

$$|r| < 1 \text{ dan limit jumlah ditentukan oleh } S = \frac{a}{(1-r)}$$

2. **Tidak mempunyai limit jumlah** atau divergen jika dan hanya jika $|r| \geq 1$.

Contoh :

Hitunglah limit jumlah pada deret geometri tak hingga berikut

$$4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \dots$$

Jawab

Menurut soal, didapat deret geometri tak hingga dengan $a = 4$, $r = -\frac{1}{2}$ ($|r| < 1$) sehingga deret konvergen dan memiliki limit jumlah. Dengan menggunakan rumus jumlah deret tak hingga diperoleh

$$S = \frac{a}{(1-r)} = \frac{4}{(1+\frac{1}{2})} = 4 \cdot \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Contoh :

Diberikan deret geometri tak hingga $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \dots$ Selidikilah apakah memiliki limit jumlah dan beri alasannya.

Jawab

Berdasarkan, didapat deret geometri tak hingga dengan $a = 2$, $r = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ sehingga $|r| \geq 1$. Karena $|r| \geq 1$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ sehingga tidak memiliki limit jumlah.

Contoh :

Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah $(4 + 2\sqrt{2})$ sedangkan rasionya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tentukan suku pertama deret tersebut

Jawab

Diketahui bahwa limit jumlah $S = (4 + 2\sqrt{2})$ dan $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $|r| < 1$ sehingga menurut rumus limit jumlah diperoleh

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{(1-r)} \leftrightarrow 4 + 2\sqrt{2} = \frac{a}{(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})} \\ \leftrightarrow a &= (4 + 2\sqrt{2}) (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 \\ \leftrightarrow a &= 2. \end{aligned}$$

Jadi, suku pertama dari deret geometri tak hingga adalah 2.

Contoh :

Sebuah bola dijatuhkan ke lantai dari suatu tempat yang tingginya 5 m. setiap kali bola itu memantul akan mencapai $\frac{2}{3}$ yang dicapai sebelumnya. Hitunglah panjang lintasan yang dilalui bola itu sampai berhenti

Jawab

Panjang lintasan yang dilalui bola sampai berhenti adalah

$$5 + \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 5 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 5 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 5 + \dots$$

$$\leftrightarrow 5\left(1 + 2\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots\right)\right) \leftrightarrow 5(1 + 2 \quad (**))$$

Bentuk pada (**) adalah deret geometri tak hingga dengan $a = \frac{2}{3}$, $r = \frac{2}{3}$ sehingga S

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2. \text{ Panjang lintasan bola sampai berhenti} = 5(1 + 2 \cdot 2) = 25.$$

3. Barisan Selain Barisan Aritmetika dan Geometri

Banyak diantara siswa bahkan sebagian guru matematika yang menganggap bahwa barisan itu hanya barisan aritmetika dan geometri. Kalau siswa mungkin wajar karena materi barisan yang dibahas hanya barisan aritmatika dan geometri. Tetapi kalau guru, sebenarnya kurang layak. Untuk menambah wawasan tentang barisan, berikut akan dibahas beberapa barisan yang bukan barisan aritmetika dan bukan barisan geometri.

Pada barisan aritmetika selisih setiap dua suku yang berturutan adalah tetap, sedangkan pada barisan geometri perbandingan dua suku yang berturutan juga tetap. Artinya, pada pengurangan pertama, untuk barisan aritmetika dan pembagian pertama pada barisan geometri, sudah nampak jelas hasilnya. Tetapi berbeda pada barisan ini, setelah proses pengurangan yang pertama, belum menghasilkan konstanta yang tetap, tetapi setelah pengurangan kedua, atau ketiga, dan seterusnya baru muncul konstanta yang tetap.

Sebagai contoh, barisan 4, 7, 12, 19, 28, 39, ... Bisa dilihat selisih dua suku yang berurutan masing-masing adalah 3, 5, 7, 9, 11, ... dan bukan konstanta tetap tetapi sudah membentuk pola bilangan. Kalau dilanjutkan, didapat selisih setiap dua unsur

berurutan adalah tetap, yaitu 2. Permasalahan yang muncul, sampai berapa tingkat, proses yang menghasilkan selisih yang tetap.

a. Barisan Bertingkat dengan Landasan Barisan Aritmetika

Salah ciri khusus barisan aritmetika terletak pada selisih dua suku yang berurutan. Pada barisan aritmetika, hasil pengurangan dua suku yang berurutan pada tahap pertama sudah diperoleh konstanta tetap.

Pada barisan berikut, pengurangan dua suku yang berurutan belum tetap. Sifat ini digunakan untuk membentuk barisan baru. Caranya adalah menentukan selisih dari setiap dua suku yang berturutan, kemudian hasilnya dibentuk barisan. Apabila pada pengurangan pertama belum terbentuk keteraturan (pola) maka dilakukan proses yang sama pada barisan yang didapat. Langkah ini dilanjutkan sampai diperoleh selisih dua suku yang berturutan adalah tetap.

Barisan baru ini bergantung pada berapa tingkat (tahap, derajat) proses pengurangannya yang menghasilkan selisih tetap sehingga namanya dikaitkan dengan tahap (derajat)nya.

Definisi

- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ dinamakan **Barisan berderajat satu** jika selisih tetap yang diperoleh dalam satu tingkat pengurangan (barisan aritmetika).
- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ dinamakan **Barisan berderajat dua** jika selisih tetap yang diperoleh dalam dua tingkat pengurangan.
- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ dinamakan **Barisan berderajat tiga** jika selisih tetap yang diperoleh dalam tiga tingkat pengurangan.

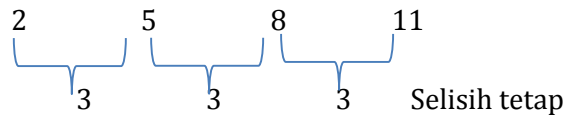
Bentuk umum dari barisan-barisan ini merupakan fungsi dalam variabel n , dengan bilangan asli dan a, b, c, d bilangan riil, yaitu

- $f(n) = a n + b$, (barisan berderajat pertama, aritmetika)
- $f(n) = a n^2 + b n + c$, (barisan berderajat kedua)
- $f(n) = a n^3 + b n^2 + c n + d$, (barisan berderajat ketiga, dan seterusnya).

Untuk lebih memantapkan tentang barisan berderajat ini, disajikan beberapa contoh.

1. Barisan 2, 5, 8, 11, ...

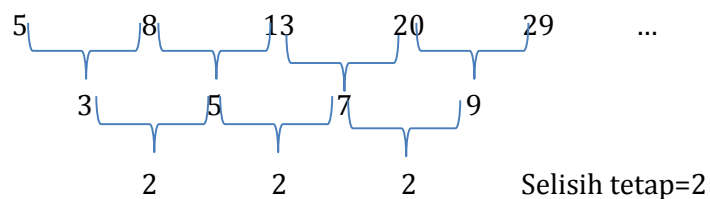
Terlihat bahwa barisan tersebut adalah barisan aritmetika, sehingga jika dibentuk barisan selisihnya diperoleh selisihnya tetap.



Selisih tetap yaitu 3 diperoleh pada pengurangan pertama sehingga barisan 2, 5, 8, 11, ... disebut barisan berderajat satu. Dengan demikian, barisan aritmetika juga bisa disebut barisan berderajat satu.

2. Barisan 5, 8, 13, 20, 29, ...

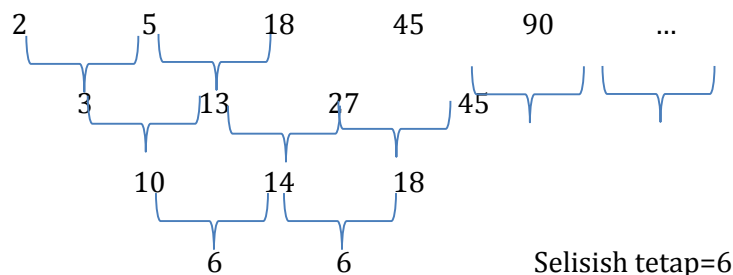
Pada proses pengurangan pertama, terlihat bahwa barisan selisihnya tidak tetap sehingga barisan ini bukan barisan aritmetika. Proses pengurangan dilanjutkan ke tingkat dua dan diperoleh selisihnya tetap.



Selisih tetap yaitu 2 diperoleh pada pengurangan kedua sehingga barisan 5, 8, 13, 20, 29, ... disebut barisan berderajat dua

3. Barisan 2, 5, 18, 45, 90, ...

Barisan ini bukan merupakan barisan aritmetika, hal tersebut dapat dibuktikan pada tingkat pengurang pertama belum diperoleh selisih tetap. Apakah barisan berderajat dua. Untuk membuktikan hal itu, proses pengurangan dilanjutkan sehingga didapat selisish yang tetap.



Selisih tetap yaitu 6 diperoleh pada pengurangan ketiga sehingga barisan 2, 5, 18, 45, 90 ... disebut barisan berderajat tiga

Target utama dalam pembahasan barisan adalah menentukan rumus umum suku ke- n , yaitu u_n dari barisan berderajat 2 atau lebih.

- **Barisan kuadrat**(bederajat dua)

Bentuk umum $u_n = a n^2 + b n + c$,

Proses :

$$\begin{array}{lcl}
 u_1=a+b+c, & u_2=4a+2b+c, & u_3=9a+3b+c, & u_4=16a+4b+c, & \dots \\
 \text{(i)} & \underbrace{a+b+c} & \underbrace{4a+2b+c} & \underbrace{9a+3b+c} & \underbrace{16a+4b+c} & \dots \\
 & \underbrace{\quad\quad\quad} & \underbrace{\quad\quad\quad} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \\
 \text{(ii)} & 3a+b & 5a+b & 7a+b & & \\
 & \underbrace{\quad\quad\quad} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & & \\
 \text{(iii)} & & 2a & 2a & &
 \end{array}$$

Untuk menentukan rumus umum suku ke- n dari barisan bilangan 25, 8, 13, 20, 29, ... dilakukan proses pengurangan berikut

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(i)} & 5 & 8 & 13 & 20 & 29 & \dots \\
 & \underbrace{\quad\quad\quad} & \underbrace{\quad\quad\quad} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & & \\
 \text{(ii)} & 3 & 5 & 7 & & & \\
 & \underbrace{\quad\quad\quad} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & & & \\
 \text{(iii)} & & 2 & 2 & & &
 \end{array}$$

Dengan mengamati kedua proses pengurangan (iii), selisih tetapnya didapat $2a = 2$ sehingga $a = 1$.

Substitusikan $a=1$ pada u_1 (ii) diperoleh

$$3 = u_1 = 3a + b = 3 + b \text{ sehingga } b = 0.$$

Substitusi $a=1, b=0$ pada u_1 (i), didapat

$$5 = a + b + c \Leftrightarrow c = 5 - b - a = 5 - 1 - 0 = 4.$$

Jadi, didapat rumus umum suku ke- n adalah $u_n = 1 n^2 + 0 n + 4 = n^2 + 4$

- Barisan bederajat tiga

Bentuk umum suku ke-n adalah $u_n = a n^3 + b n^2 + c n + d$, dengan a, b, c, d bilangan riil.

Proses :

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(i)} & a+b+c+d & 8a+4b+2c+d \quad 27a+9b+3c+d \quad 64a+16b+4c+d \\
 \text{(ii)} & \underbrace{}_{7a+3b+c} & \underbrace{}_{19a+5b+c} \quad \underbrace{}_{37a+7b+c} \\
 \text{(iii)} & \underbrace{}_{12a+2b} & \underbrace{}_{18a+2b} \\
 \text{(iv)} & & \underbrace{}_{6a} \quad \underbrace{}_{6a} \\
 \text{(v)} & &
 \end{array}$$

Untuk menentukan rumus umum suku ke-n, u_n dari barisan bilangan 2, 5, 18, 45, 90, ... dilakukan dengan membuat proses pengurangan, berikut

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(i)} & 2 & 5 \quad 18 \quad 45 \quad 90 \\
 \text{(ii)} & \underbrace{}_3 & \underbrace{}_{13} \quad \underbrace{}_{27} \quad \underbrace{}_{45} \\
 \text{(iii)} & \underbrace{}_{10} & \underbrace{}_{14} \quad \underbrace{}_{18} \\
 \text{(iv)} & \underbrace{}_4 & \underbrace{}_4
 \end{array}$$

Dengan mengamati kedua proses pengurangan, dari (iv) didapat $6a = 4$ sehingga $a = \frac{4}{6}$.

Substitusikan $a = \frac{4}{6}$ pada u_1 (iii) berlaku

$$10 = 12a + 2b \text{ sehingga } b = 1.$$

Substitusi $a = \frac{4}{6}$ dan $b=1$ pada u_1 (ii), didapat

$$1. = 7a + 3b + c, \text{ sehingga } c = -\frac{14}{3}.$$

Substitusi $a = \frac{4}{6}$, $b=1$, $c = -\frac{14}{3}$ pada u_1 (i), didapat $d=5$.

Jadi, didapat rumus umum suku ke-n adalah

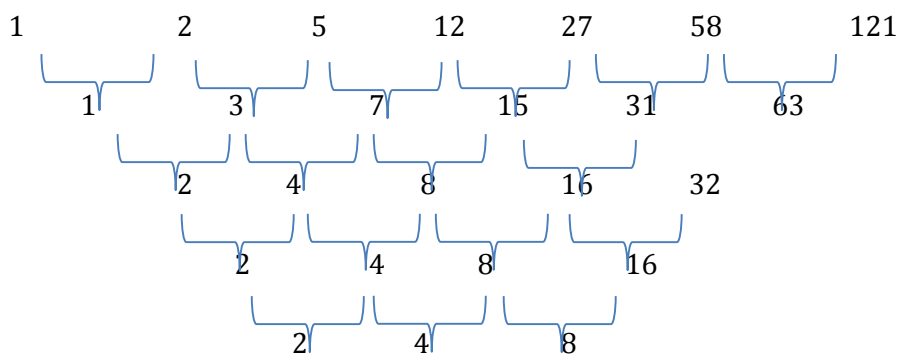
$$U_n = \frac{4}{3} n^3 + n^2 - \frac{14}{3} n + 5 = \frac{1}{3} (4 n^3 + 3 n^2 - 14 n + 15)$$

b. Barisan Bertingkat dengan Landasan Barisan Geometri

Pada barisan yang dibentuk dari barisan geometri relatif panjang prosesnya. Artinya, pada beberapa tingkat proses pengurangan belum diperoleh bentuk dengan selisih tetap, tetapi pada tingkat pengurangan tertentu selanjutnya, baru terbentuk selisih tetap. Memang, kita disuruh lebih sabar dalam menemukan barisan yang satu ini.

Sebagai contoh dalam pembahasan ini, diberikan suatu barisan yang akan dicari barisan baru yang diperoleh dengan melakukan pengurangan beberapa kali.

Diberikan barisan 1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, ...



Berdasarkan pengamatan pada proses pengurangan bahwa barisan ini mulai nampak berpola (keteraturan) pada tingkat dua. Pada hasil pengurangan tingkat dua, terbentuk 2, 4, 8, 16 dan dikenal suatu barisan yang memuat unsur 2^n dan ditambah suatu konstanta.

Maka barisan yang memiliki sifat seperti ini, secara umum dirumuskan dengan

$$u_n = 2^n + k n, \text{ untuk } n \text{ bilangan asli.}$$

Untuk menentukan k , disubstitusikan $n=1$, diperoleh

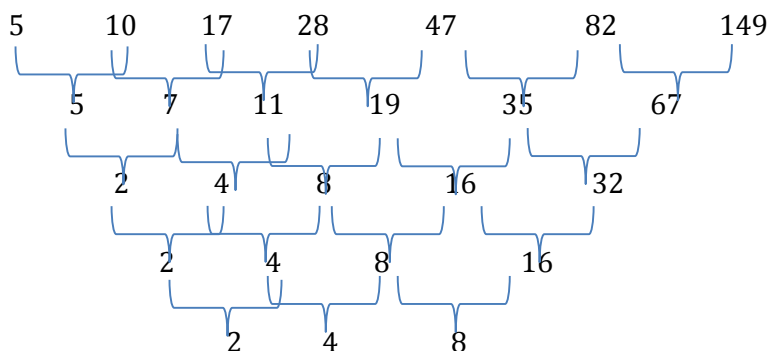
$$u_1 = 2^1 + k \cdot 1 \leftrightarrow 1 = 2 + k \leftrightarrow k = -1.$$

Jadi, rumus suku ke- n adalah $u_n = 2^n - 1$.

Contoh :

Tentukan rumus suku ke- n dari barisan berikut 5, 10, 17, 28, 47, 82, 149

Jawab



Sebagaimana contoh 1, diperoleh keteraturan dan memuat unsur 2^n sehingga rumus umumnya adalah $u_n = 2^n + kn$. Untuk menentukan nilai k , substitusikan untuk $n=1$, didapat

$$5 = u_1 = 2^1 + k \cdot 1 \leftrightarrow 5 = 2 + k \leftrightarrow k = 3.$$

Jadi, rumus umum suku ke- n , $u_n = 2^n + 3n$.

D. Aktifitas Pembelajaran

Aktivitas pembelajaran pada kegiatan pembelajaran 3 ini, Anda diminta melakukan semua perintah/instruksi atau pertanyaan yang ada di bawah ini, secara individu atau kelompok kecil.

1. Tulis dan jelaskan pengertian barisan geometri, notasi dari unsur-unsur dan suku-suku barisan geometri serta berikan dua contoh barisan geometri

2. Diberikan barisan-barisan bilangan, sebagai berikut

a. 5, 10, 20, 40, 80, ...

b. 81, 27, 9, 3, 1, ...

Selidikilah apakah barisan di atas membentuk barisan geometri!. Jika ya, tentukan suku pertama a , rasio r dan rumus umum untuk suku ke- n

3. Tulis hubungan antara tiga suku berturutan, suku ke-n dan rasio r serta buktikan bahwa

a. $\frac{u_n}{u_{n-1}} = r$ dan $u_2 = \sqrt{u_1 u_3}$

b. jika p, q asli, $p > q$ maka $u_p = \sqrt{u_{p+q} \cdot u_{p-q}}$ dan $\frac{u_p}{u_q} = r^{p-q}$

4. Tulis cara menentukan suku tengah dari barisan geometri yang mempunyai banyak suku adalah ganjil. Mulai dari 3 suku, 5 suku, 7 suku dan secara umum $(2k-1)$ suku. Buktikan bahwa suku tengah adalah akar dari hasilkali suku pertama dan suku terakhir.

5. Suatu barisan geometri, diketahui hasilkali suku ke-2 dan suku ke-4 adalah 81, sedangkan hasilkali suku ke-3 dan suku ke-5 adalah 729.

- a. Tentukan suku pertama a, rasio dan rumus suku ke-n.
- b. Jika diketahui banyaknya suku adalah 7 maka tentukan suku ke-7 dan suku tengahnya

6. Misalkan suatu barisan geometri dengan banyaknya suku adalah 9, suku tengahnya adalah 1, hasilkali suku ke-2 dan suku ke-4 adalah 5^{-4} . Tentukan suku pertama a , rasio r dan suku ke- n

7. Misalkan antara bilangan 2 dan 32 disisipkan 3 bilangan sehingga bilangan awal dan bilangan yang disisipkan membentuk barisan geometri. Buktikan bahwa barisan aritmetika yang terbentuk adalah 2, 4, 8, 16, 32, dengan rasio $r = 2$.

- a. Jika 2 diganti x , 32 diganti y dan banyak bilangan yang disisipkan adalah k

maka buktikan bahwa rasio $r' = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$

- b. Misalkan suatu barisan geometri dengan banyak unsur n , suku pertama a , rasio r sehingga dapat divisualkan

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan geometri yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan geometri yang baru, dengan suku pertama a' , rasio r' dan banyak unsur n' , maka buktikan hubungan berikut

- a. Suku pertama $a' = a$,
 b. Rasio $r' = \sqrt[k+1]{r}$
 c. Banyak unsur $n' = n + (n-1)k$

8. Tulis syarat suatu deret geometri tak hingga memiliki limit jumlah, proses penentuan nilai limit tak hingga S dan dua contoh konteks yang berkaitan dengan deret geometri tak hingga

9. Tulis dan jelaskan pengertian barisan berderajat satu, barisan berderajat dua, barisan berderajat tiga, notasi dari unsur-unsur dan suku-sukunya serta berikan masing-masing satu contoh

10. Diberikan barisan

Diberikan barisan

- a. 1, 3, 6, 10, 15, 21
- b. 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56
- c. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64

Selidikilah setiap barisan merupakan barisan berderajat dua, jelaskan dengan proses pengurangan dan tentukan rumus umum untuk suku ke- n

11. Diberikan barisan

- b. 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27
- c. 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10
- d. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

Selidikilah setiap barisan merupakan barisan berderajat tiga dan jelaskan dengan proses pengurangan

12. Diberikan barisan

- a. 7, 9, 15, 21, 37, 69, 133, ...
- b. 7, 10, 17, 28, 47, 82, 149, ...
- c. 9, 18, 28, 44, 67, 106, 177, ...

Selidikilah setiap barisan merupakan barisan bertingkat dengan landasan(asal) dari barisan geometri, jelaskan dengan proses pengurangan dan tentukan rumus umu untuk suku ke-n

13. Berikanlan dua contoh konteks yan berkaitan barisan atau deret geometri dan selesaikanlah.

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Diberikan suatu barisan yang bukan barisan aritmetika dan bukan barisan geometri 8, 18, 30, 44, 60, 78, ...

Tentukan rumus umum suku ke-n yang dimiliki barisan tersebut

2. Diberikan deret geometri

$$2\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} + 18 + \dots$$

- a. Tentukan rumus umum jumlahan ke-n
 - b. Tentukan 10 jumlahan yang pertama
3. Pada suatu barisan geometri, selisih suku kelima dan suku ketiga adalah 504, sedangkan selisih suku keempat dan suku kedua adalah 168.
- a. Tentukan rasio dan suku pertama
 - b. Tulislah lima suku pertamanya
4. Suatu perusahaan memberikan gaji terhadap karyawan yang bekerja secara lepas dan maksimal 20 hari dalam satu bulan. Perusahaan menerapkan lima hari kerja dan ada uang kompensasi ekstra bagi yang lebur kerja (sabtu, minggu). Sistem pemberian gaji setiap bulan, kerja hari pertama dibayar Rp. 10.000,00, hari kedua digaji (1.35) kali gaji hari pertama, hari berikut dibayar (1.35) kali gaji hari sebelumnya.
- Jika Anda karyawan perusahaan tersebut dan bekerja penuh 20 hari, berapakah gaji yang Anda terima dalam satu bulan
5. Akan dibuat 10 kerangka segitiga siku-siku yang terbuat dari kawat dan berbeda ukuran. Kerangka segitiga terkecil berukuran sisi alas 3 cm, tinggi 4 cm dan sisi miring 5 cm. Untuk ukuran keliling segitiga kedua adalah 1,5 kali keliling segitiga pertama(terkecil) dan ukuran keliling segitiga berikutnya adalah 1,5 kali ukuran keliling segitiga sebelumnya. Tentukan ukuran kawat yang harus disediakan untuk membuat 10 segitiga tersebut.

F. Rangkuman

1. **Barisan Geometri** adalah barisan yang **perbandingan** dua suku yang berturutan adalah **tetap**
2. Unsur-unsur yang terkait dalam barisan geometri dinotasikan, u_1 : suku pertama (a), r : rasio, u_n : rumus umum suku ke-n dengan $u_n = a r^{n-1}$.
3. **Suku tengah**, u_k adalah akar dari hasil kali suku pertama dan suku terakhir, dinotasikan dengan $u_k = \sqrt{u_1 \cdot u_{2k-1}}$

4. Pembentukan barisan baru dapat dilakukan dengan proses penyisipan pada dua bilangan x, y . Hubungan antara banyaknya bilangan yang disisipkan k , beda b barisan yang terbentuk adalah

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$$

5. Misalkan suatu barisan geometri dengan banyak unsur n , suku pertama a , rasio r sehingga dapat divisualkan

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

6. Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan aritmetika yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru, dengan suku pertama a' , beda b' dan banyak unsur n' , maka, Buktikan hubungan berikut
- Suku pertama $a' = a$,
 - Rasio $r' = \sqrt[k+1]{r}$
 - Banyak unsur $n' = n + (n-1)k$
7. **Deret Geometri** adalah jumlahan beruntun suku-suku dalam barisan geometri
8. Pada deret geometri menghasilkan suatu nilai riil sehingga untuk n berhingga selalu menghasilkan nilai jumlahan.
9. Deret Geometri Tak Hingga merupakan perluasan deret geometri, sehingga untuk n mendekati tak hingga, kemungkinan limit jumlahannya adalah
- Memiliki nilai limit jumlahan S , yaitu $S = \frac{a}{1-r}$ jika $|r| < 1$ (konvergen)
 - Tidak memiliki limit jumlahan, yaitu $S \rightarrow \infty$, jika $|r| \geq 1$ (divergen)

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Belajar 1.

KUNCI JAWABAN

• KG1 : Bilangan

1. Terdapat berbagai kemungkinan jawaban.
2. Nyatakan 3,142678 dalam bentuk $\frac{a}{b}$.
3. Misalkan bilangan 0,3333... dinyatakan dalam x . Sehingga $x = 0,3333 \dots$. Selanjutnya kalikan kedua ruas dengan 10 (karena perulangannya setiap 1 angka), diperoleh $10x = 3,3333 \dots$. Kurangkan persamaan $x = 0,3333 \dots$ dari $10x = 3,3333 \dots$, diperoleh $9x = 3$. Sehingga $x = \frac{1}{3}$. Dengan demikian 0,3333... dapat dituliskan sebagai $\frac{1}{3}$.
4. Untuk menentukan sebuah bilangan irrasional di antara $\frac{1}{7}$ dan $\frac{2}{7}$, kita harus mencari sebuah bilangan yang mempunyai representasi desimal yang tidak berhenti (*nonterminating*) dan tidak berulang (*nonrepeating*). Terdapat tak berhingga bilangan yang memenuhi. Salah satu contoh adalah 0,150150015000150000 ...
5. Gunakan pembuktian dengan kontradiksi. Nyatakan $\sqrt{3}$ dalam bentuk $\frac{a}{b}$. Lihat pada uraian materi tentang pembuktian untuk $\sqrt{2}$.

• KG 2 : Pembagian dan Sisa

1. Karena banyaknya bola pada masing-masing kotak adalah sama, maka banyak bola harus merupakan pembagi dari 24 dan 36. Tujuan kita adalah menentukan pembagi (positif) persekutuan dari 24 dan 36 yang lebih besar dari 1. Selanjutnya kita daftar masing-masing pembagi (positif) dari 24 dan 36.

Pembagi (positif) dari 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Pembagi (positif) dari 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Karena paling sedikit terdapat 2 bola pada masing-masing kotak, maka banyaknya bola yang mungkin pada masing-masing kotak adalah 2, 3, 4, 6, dan 12.

2. Bilangan-bilangan bulat positif kurang dari 40 yang mempunyai sisa 2 jika dibagi oleh 7 adalah

$$\begin{array}{rclclcl} 0 \cdot 7 + 2 & = & 0 + 2 & = & 2 \\ 1 \cdot 7 + 2 & = & 7 + 2 & = & 9 \\ 2 \cdot 7 + 2 & = & 14 + 2 & = & 16 \\ 3 \cdot 7 + 2 & = & 21 + 2 & = & 23 \\ 4 \cdot 7 + 2 & = & 28 + 2 & = & 30 \\ 5 \cdot 7 + 2 & = & 35 + 2 & = & 37 \\ 6 \cdot 7 + 2 & = & 42 + 2 & = & 44 \end{array}$$

Dengan demikian bilangan bulat positif terbesar kurang dari 40 yang mempunyai sisa 2 jika dibagi oleh 7 adalah 37.

3. Kita akan mencari suatu bilangan bulat yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11. Misalkan bilangan tersebut adalah n . Menurut Algoritma Pembagian, n dapat dinyatakan dalam bentuk $n = 11q + 4$ untuk suatu bilangan bulat q . Semakin besar nilai q akan menyebabkan semakin besar nilai n . Hal ini berarti kita dapat mencari nilai terbesar dari n dengan terlebih dahulu mencari nilai terbesar dari q . Karena n merupakan bilangan tiga angka maka $n < 1000$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 11q + 4 &< 1000 \\ 11q &< 996 \\ q &< 90\frac{6}{11} \end{aligned}$$

Karena q harus merupakan bilangan bulat, nilai terbesar dari q yang mungkin adalah 90. Dari nilai q tersebut, kita dapat menentukan nilai terbesar yang mungkin dari n , yang merupakan bilangan tiga angka terbesar yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11, yaitu

$$\begin{aligned} n &= 11q + 4 \\ &= 11 \cdot 90 + 4 \\ &= 994 \end{aligned}$$

Dengan demikian bilangan tiga angka terbesar yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11 adalah 994.

4. Kita harus mencari bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk $6q + 1$ untuk suatu bilangan cacah q . Selanjutnya kita tentukan nilai q sedemikian hingga

$$0 \leq 6q + 1 \leq 100$$

Terdapat dua pertidaksamaan yang harus dicari penyelesaiannya, yaitu

$$(1) \quad 0 \leq 6q + 1 \Rightarrow -1 \leq 6q \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq q$$

$$(2) \quad 6q + 1 \leq 100 \Rightarrow 6q \leq 99 \Rightarrow q \leq 16\frac{1}{2}$$

Karena q harus merupakan bilangan bulat, kedua pertidaksamaan tersebut menyatakan bahwa $0 \leq q \leq 16$. Terdapat 17 bilangan bulat dari 0 sampai dengan 16 yang menyatakan nilai q . Dengan demikian terdapat 17 bilangan bulat dari 0 sampai dengan 100 yang mempunyai sisa 1 jika dibagi oleh 6, yaitu

$$\begin{array}{rcl} 0 \cdot 6 + 1 & = & 0 + 1 = 1 \\ 1 \cdot 6 + 1 & = & 6 + 1 = 7 \\ 2 \cdot 6 + 1 & = & 12 + 1 = 13 \\ & \vdots & \\ 16 \cdot 6 + 1 & = & 96 + 1 = 97 \end{array}$$

5. Kita harus mencacah banyaknya bilangan bulat dalam bentuk $8q + 5$ yang terletak antara 200 dan 300, yaitu

$$\begin{array}{rcl} 200 & \leq & 8q + 5 \leq 300 \\ 195 & \leq & 8q \leq 295 \\ 24\frac{3}{8} & \leq & q \leq 36\frac{7}{8} \end{array}$$

Sehingga $24 < q \leq 36$. Masing-masing ke-12 nilai yang mungkin dari q menyatakan satu dari 12 bilangan bulat dalam bentuk $8q + 5$ antara 200 dan 300 yang mempunyai sisa 5 jika dibagi oleh 8. Dengan demikian terdapat 12 bilangan bulat antara 200 dan 300 yang mempunyai sisa 5 jika dibagi oleh 8.

• KG 3 : Estimasi Dan Pengukuran

1. Penyelesaian

- a. 0,1235 akan dibulatkan sampai sepersepuluhan terdekat, artinya sama saja dengan membulatkan sampai 1 tempat desimal. Kita cek angka yang berada pada posisi kedua di sebelah kanan tanda koma, yaitu 2. Karena nilainya

kurang dari 5 ($2 < 5$), maka lakukan pembulatan ke bawah menjadi 0,1. Kita menuliskan $0,1235 = 0,1$ (sampai sepersepuluhan terdekat).

- b. Ditulis $0,1235 = 0,12$ (sampai seperseratusan terdekat).
- c. Ditulis $0,1235 = 0,124$ (sampai seperseribuan terdekat).

2. Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{65,8 \times 24,1}{32,3} &\approx \frac{66 \times 22}{33} = 44 \\ &\approx 50 \text{ (sampai 1 angka penting)} \end{aligned}$$

Keterangan:

- 33 digunakan untuk menggantikan 32, karena 33 dan 66 mempunyai faktor persekutuan 33 (memudahkan perhitungan).
- 22 digunakan untuk menggantikan 24, karena 22 dan 33 mempunyai faktor persekutuan 11 (memudahkan perhitungan).

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{65,8 \times \sqrt{24,1}}{3,23^2} &\approx \frac{65 \times \sqrt{25}}{3^2} = \frac{65 \times 5}{9} \\ &\approx \frac{65 \times 5}{10} = 32,5 \\ &\approx 30 \text{ (sampai 1 angka penting)} \end{aligned}$$

Keterangan:

- 3,23 dibulatkan menjadi 3 (1 angka penting) untuk memudahkan
- 24,1 dibulatkan menjadi 25 (bilangan kuadrat terdekat).
- 9 dibulatkan menjadi 10 (puluhan terdekat).

3. Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{97,85 \times \sqrt{63,8}}{24,79} &\approx \frac{100 \times \sqrt{64}}{25} = 4 \times 8 = 32 \\ &\approx 30 \\ \text{b. } \frac{4870 \times 1227 + 968 \times 4870}{1936 \times 0,49} &\approx \frac{5000 \times 1000 + 1000 \times 5000}{2000 \times 0,5} = \frac{2000 \times 5000}{2000 \times 0,5} \\ &\approx 10000 \end{aligned}$$

4. Penyelesaian

Volume akuarium mini tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 V &= 21,35 \times 17,4 \times 9,86 \\
 &= 3662,8914 \\
 &\approx 3660 \text{ (sampai 3 angka penting)}
 \end{aligned}$$

Sehingga volume akuarium adalah 3660 cm^3 .

5. Penyelesaian

a. Perkiraan keliling lingkaran

$$\begin{aligned}
 K &= 2 \times 3,1416 \times 997 \\
 &= 6264,35 \text{ cm} \\
 &\approx 63 \text{ m (sampai bilangan bulat terdekat)}
 \end{aligned}$$

b. Perkiraan luas lingkaran

$$\begin{aligned}
 L &= 3,1416 \times 11,09^2 \\
 &= 386,38 \text{ m}^2 \\
 &\approx 386 \text{ m}^2 \text{ (sampai bilangan bulat terdekat)}
 \end{aligned}$$

• KG 4 : Pola, Barisan dan Deret Bilangan

1. Hitunglah $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$

Jawab

Menurut sifat-sifat notasi sigma, diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(2i-1)} - \frac{1}{(2i+1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) = \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{2 \cdot 20}{2 \cdot 20 + 1} = \frac{40}{41}$$

2. Berdasar pola didapat barisan bilangan 3, 4, 5, 6, 7, 8 sehingga didapat jumlah barisan bilangan yang terbentuk adalah

$$3+4+5+6+7+8 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 - 3 = 34 \text{ (ingat, deret 8 bilangan asli pertama)}$$

3. Berdasarkan soal, diketahui $u_2+u_4 = 16 \Leftrightarrow 2a + 4b = 16 \dots (*)$ dan

$$u_3 + u_6 = 25 \Leftrightarrow 2a + 7b = 25 \dots (**)$$

Berdasarkan hasil (*) dan (**) didapat SPLDV

$$2a + 4b = 16$$

$$2a + 7b = 25,$$

dan diperoleh $b = 3$, dan $a = 2$.

Jadi, barisan yang didapat adalah 2, 5, 8, 11, 14, 17

4. Misalkan u_1 : uang saku anak ke-4 (bungsu) adalah Rp. 100.000 sehingga didapat $u_2 = \frac{3}{2} \times \text{Rp. } 100.000 = \text{Rp. } 150.000$, $u_3 = \frac{3}{2} \times \text{Rp. } 150.000 = \text{Rp. } 225.000$ dan $u_4 = \frac{3}{2} \times \text{Rp. } 225.000 = \text{Rp. } 337.500$.

Diperoleh u_1, u_2, u_3, u_4 suatu barisan dengan perbandingan dua suku berturutan adalah $\frac{3}{2}$. Banyaknya uang yang harus disediakan setiap minggunya adalah nilai deret $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \text{Rp. } 812.500$.

5. Misalkan sisi-sisi yang membentuk barisan adalah $a-b, a, a+b$ sehingga diperoleh deret $(a-b) + a + (a+b) = 60 \Leftrightarrow 3a = 60$, jadi $a=20$.

Karena segitiga siku-siku, maka berlaku $(a-b)^2 + a^2 = (a+b)^2$ sehingga didapat

$$a^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow a(a - 4b) = 0 \Leftrightarrow a=4b \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}a = 5. \text{ Sisi yang lain, didapat } a - b = 20 - 5 = 15 \text{ dan } a+b=25.$$

Jadi, panjang sisi-sisinya masing-masing adalah 5 cm, 20 cm dan 25 cm.

KG 5 : Barisan dan Deret Aritmetika

1. Jawab

- b. Barisan 10, 17, 24, ... adalah barisan aritmetika dengan suku pertama $a=10$, beda $b=7$ sehingga didapat rumus suku umum u_n , dengan $u_n = a + (n-1)b = 10 + (n-1)7 = 7n + 3$. Untuk $n=10$, didapat $u_{10} = 7 \cdot 10 + 3 = 73$.

Sehingga jumlah deret 10 suku pertama adalah $S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (a + u_{10}) = 5 (10 + 73) = 5 \cdot 83 = 415$.

- c. Karena $10 + 17 + \dots + u_n = 1680$ maka berlaku $S_n = 1680$ sehingga

$$\frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = 1680 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(20 + (n-1)7) = 1680$$

$$\Leftrightarrow n(13 + 7n) = 3360 \Leftrightarrow 7n^2 + 13n - 3360 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 21)(7n + 160) = 0. \text{ Jadi, banyaknya suku adalah } n=21.$$

2. Jawab

Jumlah suku ke-2 dan suku ke-6 adalah 30 maka didapat hubungan

$$u_2 + u_6 = 30 \leftrightarrow 2a + 6b = 30, \dots (*)$$

Jumlah suku ke-3 dan suku ke-7 adalah 38 maka didapat hubungan

$$u_3 + u_7 = 28 \leftrightarrow 2a + 8b = 28, \dots (**).$$

Berdasarkan hasil (*) dan (**), didapat $a = 3$ dan $b = 4$ sehingga didapat suku terakhir $u_7 = a + 6b = 3 + 6 \cdot 4 = 27$.

Suku tengah, adalah $u_t = \frac{1}{2}(a + u_7) = \frac{1}{2}(3 + 27) = 15$.

Jadi, didapat $a = 3$, suku terakhir $u_7 = 27$ dan suku tengah $u_k = 15$.

3. Jawab

Barisan aritmetika dengan $n = 4$ unsur, $a = 5$ dan beda $b = 16$ sehingga didapat barisannya adalah $a = 5$, $u_2 = a + b = 21$, $u_3 = 37$, $u_4 = 53$. Setiap dua unsur yang berturut-turut disisipkan 3 bilangan sehingga $k = 3$ dan membentuk barisan aritmetika baru, dengan $a^1 = a = 5$, $n^1 = n + (n - 1)k = 4 + 3 \cdot 3 = 13$ dan $b^1 = \frac{b}{(k + 1)} = \frac{16}{(3 + 1)} = 4$. Jadi barisan aritmetika yang terbentuk adalah 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53.

4. Jawab

Menurut soal, diketahui bahwa panjang sisi-sisinya membentuk barisan aritmetika maka dapat dimisalkan panjang sisi segitiga siku-siku adalah $x = a - b$, $y = a$, dan $z = a + b$.

Jumlah sisi ke-1 dan sisi ke-3 adalah 32 maka berlaku hubungan

$$(a - b) + (a + b) = 32 \leftrightarrow 2a = 32, \text{ sehingga } a = 16.$$

Menurut Pythagoras, diperoleh hubungan

$$(a + b)^2 = a^2 + (a - b)^2$$

$$\leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a^2 - 2ab + b^2 \leftrightarrow 2a^2 - 4ab = 0$$

$$\leftrightarrow 2a(a - 2b) = 0, \text{ didapat } a = 2b, \text{ akibatnya } b = 8.$$

Jadi, diperoleh panjang sisi-sisinya adalah $x = a - b = 8$ cm, $y = a = 16$ cm dan $z = a + b = 24$ dan barisannya adalah 8, 16, 24

5. Jawab

Misalkan banyaknya beaya taksi yang harus dibayar anak ke-1 adalah u_1 , banyaknya beaya taksi yang harus dibayar anak ke-2 adalah u_2 , ..., banyaknya beaya taksi yang harus dibayar anak ke-5 adalah u_5 . Maka didapat $u_1 = 20.000$, $u_2 = 30.000$, $u_3 = 40.000$, $u_4 = 50.000$, $u_5 = 60.000$ sehingga diperoleh barisan aritmetika 20.000, 30.000, 40.000, 50.000, 60.000 dengan $a=10.000$ dan beda $b=10.000$

KG 6 : Barisan dan Deret Geometri

1. Jawab

Untuk menentukan rumus umum suku ke-n, dilakukan proses berikut

Proses 1:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(i)} & 8 & 18 & 30 & 44 & 60 & 78 \\
 \text{(ii)} & & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 \\
 \text{(iii)} & & & 2 & 2 & 2 & 2
 \end{array}$$

Proses 2.

$$\begin{array}{lcl}
 u_1=a+b+c, & u_2=4a+2b+c, & u_3=9a+3b+c, & u_4=16a+4b+c, & \dots \\
 \text{(i)} & a+b+c & 4a+2b+c & 9a+3b+c & 16a+4b+c \\
 & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \\
 \text{(ii)} & 3a+b & 5a+b & 7a+b & \\
 & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \\
 \text{(iii)} & & 2a & 2a &
 \end{array}$$

Berdasarkan hasil proses 1 dan proses 2, didapat kesamaan $2a = 2$ sehingga $a = 1$.

Substitusikan $a=1$ pada u_1 (ii) diperoleh

$$10 = u_1 = 3a + b = 3 + b \text{ sehingga } b = 7.$$

Substitusi $a=1$, $b=7$ pada u_1 (i), didapat

$$8 = a + b + c \Leftrightarrow c = 8 - b - a = 8 - 1 - 7 = 0.$$

Jadi, didapat rumus umum suku ke-n adalah $u_n = 1n^2 + 7n + 0 = n^2 + 7n$

2. Jawab

- a. Dari soal didapat deret geometri, dengan $a = 2\sqrt{3}$, rasio $r = \sqrt{3}$ dan rumus umum jumlahan ke- n adalah S_n , dengan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}^n - 1)}{\sqrt{3} - 1}$
 $= \sqrt{3}(\sqrt{3}^n - 1)$

- b. S_{10} adalah 10 jumlahan yang pertama dengan

$$S_{10} = \sqrt{3}(\sqrt{3}^{10} - 1) = 242\sqrt{3}$$

3. Jawab

- a. Misal u_1, u_2, \dots, u_n suatu barisan geometri dengan suku pertama a , rasio r dan u_n rumus suku ke- n

$$\bullet u_5 - u_3 = 504 \Leftrightarrow a r^4 - a r^2 = a r^2 (r^2 - 1) = 504$$

$$\bullet u_4 - u_2 = 168 \Leftrightarrow a r^3 - a r = a r (r^2 - 1) = 168$$

Maka didapat

$$\frac{u_5 - u_3}{u_4 - u_2} = \frac{504}{168} \Leftrightarrow \frac{ar^4 - ar^2}{ar^3 - ar^1} = \frac{504}{168} \Leftrightarrow \frac{ar^2(r^2 - 1)}{ar(r^2 - 1)} = \frac{504}{168}$$

$$r = \frac{504}{168} = 3. \text{ Jadi, dapat rasio } r = 3.$$

Substitusikan $r = 3$, didapat $a \cdot 3 (3^2 - 1) = 168$ sehingga didapat $a = 7$.

- b. Lima suku pertama adalah 7, 14, 21, 28 35.

4. Jawab

Misalkan gaji hari ke- i adalah u_i maka didapat

$u_2 = (1.35) u_1, u_3 = (1.35) u_2, \dots$ maka terbentuk deret geometri

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

dengan $a = 10.000,00$, $r = (1.35)$ dan jumlah n pertama adalah S_n , dengan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$.

Gaji yang diterima di akhir bulan adalah S_{20} , sehingga

$$S_{20} = \frac{10.000((1.35)^{20} - 1)}{1.35 - 1} = 10.000 (1151,6884) = 11.516.884$$

Jadi gaji yang diterima adalah Rp. 11.516.884,00

5. Jawab

Karena segitiga siku-siku yang terkecil mempunyai sisi alas adalah 3 cm, tinggi sama dengan 4 cm dan sisi miringnya 5 cm maka kelilingnya $3+4+5=12$ cm.

Misalkan

K_1 : keliling kerangka segitiga pertama, K_2 : keliling kerangka segitiga kedua, ..., K_3 : keliling kerangka segitiga ketiga, ..., K_n adalah keliling segitiga ke-n. maka didapat,

$K_1 = 12$, $K_2 = 1,5 K_1$, $K_3 = 1,5 K_2$, ... didapat deret geometri $K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n$, dengan $a=K_1$, rasio $r=1,5$ dan jumlah n suku pertama adalah $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{12(1,5^n - 1)}{1,5 - 1} = 24(1,5^n - 1)$.

Untuk jumlah 10 segitiga pertama, adalah

$$S_{10} = 24(1,5^{10} - 1) = 24 \cdot 57,665 = 1383,9 \text{ cm}$$

Jadi, panjang kawat yang dibutuhkan untuk membuat 10 segitiga siku-siku adalah 1383,9 cm

Evaluasi

Soal Evaluasi

1. Ditentukan aturan permainan untuk melalui tangga sebagai berikut:
 - a. Melangkah per anak tangga atau melompati satu anak tangga
 - b. Tidak diperbolehkan melompati dua anak tangga atau lebih sekaligusUntuk melalui satu anak tangga hanya dapat dilakukan dengan satu cara, untuk melalui dua anak tangga dapat dilakukan dengan dua cara, dan untuk melalui tiga anak tangga dapat dilakukan dengan tiga cara. Demikian seterusnya. Banyak cara untuk melalui delapan anak tangga adalah ...
 - A. 21
 - B. 34
 - C. 55
 - D. 89
2. Pernyataan berikut yang benar terkait dengan bilangan adalah ...
 - A. Bilangan π merupakan bilangan rasional
 - B. Jumlah dua bilangan rasional pasti menghasilkan bilangan rasional
 - C. Jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional
 - D. $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional
3. Suatu toko mengadakan promosi untuk suatu produk dengan program “BELI 4 GRATIS 1” dan berlaku untuk kelipatannya. Jika harga satu produk tersebut Rp25.000, maka banyak barang yang diperoleh seseorang dengan membelanjakan uangnya sebesar Rp1.700.000 untuk pembelian barang tersebut adalah ...
 - A. 63
 - B. 84
 - C. 85
 - D. 101

4. Yoga membeli 3 baju, 1 kaos, dan 1 celana. Harga setiap baju, kaos, dan celana setelah didiskon berturut-turut adalah Rp39.575,00; Rp15.750,00; dan Rp24.250,00. Perkiraan uang yang harus disiapkan Yoga untuk membeli barang-barang tersebut adalah ...
 - A. Rp80.000,00
 - B. Rp150.000,00
 - C. Rp160.000,00
 - D. Rp170.000,00
5. Pernyataan berikut yang benar terkait dengan bilangan adalah ...
 - A. Bilangan π merupakan bilangan rasional
 - B. Selisih dua bilangan rasional belum tentu menghasilkan bilangan rasional
 - C. Selisih dua bilangan irrasional belum tentu menghasilkan bilangan irrasional
 - D. $\sqrt{3}$ merupakan bilangan rasional
6. Setiap bilangan asli dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan dari bilangan 1 dan 2. Dengan demikian bilangan 1 dapat dinyatakan dengan 1 cara, bilangan 2 dengan 2 cara, dan bilangan 3 dengan 3 cara. Banyak cara untuk menyatakan bilangan 8 adalah ...
 - A. 21
 - B. 34
 - C. 55
 - D. 89
7. Yafi membeli 1 baju, 2 kaos, dan 3 celana. Harga setiap baju, kaos, dan celana berturut-turut adalah Rp59.575,00; Rp45.750,00; dan Rp26.250,00. Perkiraan uang yang harus disiapkan Yafi untuk pembelian barang-barang tersebut adalah ...
 - A. Rp165.000,00
 - B. Rp170.000,00
 - C. Rp230.000,00
 - D. Rp235.000,00

8. Suatu toko memberikan penawaran khusus produk tertentu yaitu “BELI 2 GRATIS 1” dan berlaku kelipatannya. Jika harga satu produk tersebut Rp30.000,00, maka banyak barang yang dapat diperoleh seorang pembeli yang membelanjakan uangnya sebesar Rp1.920.000,00 untuk membeli produk tersebut adalah
- A. 64
 - B. 96
 - C. 128
 - D. 172
9. Pernyataan berikut yang benar terkait dengan bilangan adalah
- A. Bilangan e merupakan bilangan rasional
 - B. Jumlah dua bilangan rasional pasti menghasilkan bilangan rasional
 - C. Jumlah dua bilangan irrasional pasti menghasilkan bilangan irrasional
 - D. Selisih dua bilangan rasional belum tentu menghasilkan bilangan rasional
10. Suatu permainan mengisi ember dilakukan dengan aturan sebagai berikut:
- a. Mengisi dengan botol 1 liter atau 2 liter
 - b. Tidak diperbolehkan mengisi dengan dua botol atau lebih secara bersamaan
- Dengan demikian untuk mengisi 1 liter air ke ember ada 1 cara, 2 liter air ada 2 cara, 3 liter air ada 3 cara. Demikian seterusnya. Banyak cara untuk mengisi 8 liter air ke dalam ember adalah
- A. 21
 - B. 34
 - C. 55
 - D. 89
11. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli ganjil. Pernyataan di bawah yang benar adalah
- A. Himpunan A tertutup terhadap semua operasi bilangan
 - B. Himpunan A tertutup terhadap operasi penjumlahan
 - C. Himpunan A tidak tertutup terhadap operasi perkalian bilangan
 - D. Himpunan A tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

12. Suatu barisan aritmetika, diketahui jumlah suku ke-2 dan suku ke-5 adalah 50 dan selisih suku ke-8 dan suku ke-4 adalah 28. Jumlah dari deret 20 suku pertama adalah
- A. 1562
 - B. 1520
 - C. 1453
 - D. 1410
13. Suatu barisan geometri dengan hasil kali suku ke-3 dan suku ke-6 adalah 3200, sedangkan hasil bagi suku ke-7 dan suku ke-4 adalah 8. Jumlah deret geometri dari 10 suku pertama adalah
- A. 5115
 - B. 5221
 - C. 5225
 - D. 5615
14. Suatu bola terletak pada ketinggian 5 m diatas lantai. Bola dilepas dan akan memantul setinggi $\frac{3}{7}$ tinggi sebelumnya. Panjang lintasan yang dibentuk bola hingga berhenti adalah
- A. 12,5 m
 - B. 15 m
 - C. 15,5 m
 - D. 20,5 m
15. Banyak bilangan bulat antara 2 dan 3001 yang merupakan kelipatan 3 dan 5 tetapi bukan kelipatan 7 adalah
- A. 1372
 - B. 1632
 - C. 1723
 - D. 1902

Kunci jawaban evaluasi

1. B
2. B
3. C
4. C
5. C
6. B
7. C
8. B
9. B
10. B
11. D
12. D
13. A
14. A
15. A

Penutup

Submodul ini dimulai dengan pembahasan mengenai bilangan yang berkaitan dengan sistem bilangan, karakteristik terhadap estimasi serta penafsiran suatu hasil operasi bilangan. Selanjutnya, dibahas juga mengenai pola bilangan, barisan dan deret bilangan. Dengan menentukan pola pada suatu himpunan diperoleh susunan berpola yang berbentuk barisan baik barisan aritmetika dan barisan geometri. Penguasaan terhadap barisan diterapkan pada pembentukan deret sehingga dapat menentukan nilai jumlahnya. Khususnya untuk deret geometri, dibahas untuk deret geometri tak hingga yang konvergen.

Pembahasan materi pada modul ini, dimulai dari kasus faktual yang sederhana, konsep, contoh-contoh, pengembangan konsep dan diakhiri soal-soal. Pemberian contoh dan soal meliputi permasalahan teoritis dan konteks dalam kehidupan sehari-hari. Namun tentu masih banyak kekurangan yang ada dalam modul ini, oleh karena itu Bapak/Ibu guru dapat melengkapi dan memperdalam materi ini dengan mengkaji sumber pustaka yang terdapat dalam daftar pustaka berikut.

Pada akhirnya, mudah-mudahan modul ini dapat memberi masukan kepada Bapak/Ibu guru untuk dapat mengembangkan kompetensinya, di samping guru juga harus secara aktif berupaya mencari kegiatan untuk pengembangan dirinya. Dengan tersedianya bahan ini, diharapkan akan membantu Bapak/Ibu guru untuk meningkatkan kompetensinya yang akan terlihat pada peningkatan nilai UKG sehingga dapat membantu peserta didik dalam membangun pengetahuannya. Semoga bermanfaat...

Penutup

Daftar Pustaka

- Chong, Lai Chee, Low Wai Cheng, Leong May Kuen, 2008, *Mathematics Matters (Normal/Academic)*, Singapore: EPB Pan Pacific.
- Crawford, Mathew, 2006, *The Art of Problem Solving: Introduction to Number Theory*, Alpine, CA: AoPS Inc.
- Epp, Susanna S., 2011, *Discrete Mathematics with Applications*, Boston, MA: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Ferland, Kevin, 2009, *Discrete Mathematics: An Introduction to Proofs and Combinatorics*, Boston, MA: Houghton Mifflin Company.
- French, Doug dan Charlie Stripp, 2001, *'Are You Sure?': Learning about Proof*, Leicester, UK: The Mathematical Association.
- Gantert, Ann Xavier, 2007, *Integrated Algebra 1*, New York, N. Y.: AMSCO School Publications, Inc.
- Gantert, Ann Xavier, 2009, *Algebra 2 and Trigonometry*, New York, N. Y.: AMSCO School Publications, Inc.
- Gellert, W., S. Gottwald, M. Hellwich, et al., 1989, *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, New York, N.Y.: Van Nostrand Reinhold.
- Huo, Fan Liang, Cheang Wai Kwong, Dong Feng Ming, dkk, 2007, *New Express Mathematics*, Singapore: Panpac Education Pte. Ltd.
- Johnson, David B. dan Thomas A. Mowry, 2012, *Mathematics, A Practical Odyssey*, Belmont, CA: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Kime, Linda Almgren, Judith Clark dan Beverly K. Michael, 2011, *Explorations in College Algebra*, Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc.
- Kordemsky, Boris A., 1972, *The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations*, New York, N.Y.: Charles Scribner's Sons.
- Larson, Ron, dan David C. Falvo, 2011, *Algebra and Trigonometry*, Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Meng, Sin Kwai, 2004, *Exploring Mathematics (Special/Express)*, Singapore: SNP Panpac Pte. Ltd.
- Patrick, David, 2006, *The Art of Problem Solving: Introduction to Counting and Probability*, Alpine, CA: AoPS Inc.
- Peterson, John A. dan Joseph Hashisaki, 1963, *Theory of Arithmetic*, New York: John Wiley and Sons, Inc.

- Seng, Teh Keng, Looi Chin Keong, 2003, *New Syllabus Mathematics 5th Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte. Ltd.
- Seng, Teh Keng, Loh Cheng Yee, 2010, *New Syllabus Mathematics 6th Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte. Ltd.
- Smith, Karl J., 2012, *The Nature of Mathematics*, Belmont, CA: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Stewart, James, Lothar Redlin, dan Saleem Watson, 2012, *Algebra and Trigonometry*, Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Wiworo, 2013, *Teknik Dasar Mencacah untuk Memahami Materi Kombinatorika dalam Olimpiade Matematika*, paper dalam *proceeding* Seminar Nasional Pendidikan Matematika I 2013, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.
- Wiworo, 2014, *Cara Menentukan Banyak Faktor Bilangan Bulat Positif*, paper dalam *proceeding* Seminar Nasional Pendidikan Matematika II 2014, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.
- Wono Setya Budhi, 2004, *Matematika untuk SMP*, Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Wuan, Lee Yee, Leong May Kuen, Low Wai Cheng, 2004, *Exploring Mathematics (Normal/Academic)*, Singapore: SNP Panpac Pte. Ltd.
- Young, Cynthia Y., 2013, *Algebra and Trigonometry*, Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc.
- Depdiknas. 2006. *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi Untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta: Depdiknas.
- Puji Iryanti. 2005. *Notasi Sigma, Barisan dan Deret Bilangan*. Yogyakarta: PPPG Yogyakarta.
- Wirodikromo, Sartono. 1999. *Matematika untuk SMU, jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Purcell, Edwin I. 2001. *Calculus with Analytic Geometry Geometry*, Seventh Edition, Prince Hall International Inc., Englewood Cliffs, 2001.
- Engel, A. 1999. *Problem Solving Strategies*. New York: Springer.

Glosarium

- **Pola bilangan** adalah suatu **aturan tertentu** yang diberlakukan pada kumpulan bilangan
- **Barisan** adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola tertentu, yaitu **selisih** atau **perbandingan** terhadap dua suku yang berturutan adalah tetap
- **Deret** bilangan adalah jumlah beruntun dari suku-suku suatu barisan
- **Barisan Aritmetika** adalah suatu barisan yang selisih dua suku yang berturutan adalah tetap
- **Suku pertama** adalah suku ke-1 dari suatu barisan, notasi $u_1 = a$, **beda** suatu barisan aritmetika adalah selisih dua suku yang berturutan, notasi $b = u_n - u_{n-1}$ dan u_n adalah rumus umum untuk suku ke-n barisan aritmetika
- **Suku tengah**, u_k suatu barisan aritmetika yang banyaknya suku ganjil adalah setengah dari jumlah suku pertama dan suku terakhir, dinotasikan dengan $u_k = \frac{1}{2} (u_1 + u_{2k-1})$
- **Deret Aritmetika** adalah jumlah beruntun suku-suku suatu barisan aritmetika
- **Notasi S_n** adalah jumlah n suku dari deret aritmetika dan dirumuskan

$$S_n = \frac{1}{2} n (2a + (n - 1)b)$$

- **Barisan Geometri** adalah suatu barisan yang perbandingan dua suku yang berturutan adalah tetap
- **Rasio** suatu barisan geometri, r adalah hasil perbandingan dua suku yang berturutan dari barisan geometri dan dirumuskan $r = \frac{u_n}{u_{n-1}}$
- **Suku tengah** suatu barisan geometri, u_k adalah akar dari hasil kali suku pertama dan suku terakhir barisan geometri
- **Deret Geometri** adalah jumlah beruntun suku-suku dalam barisan geometri
- **Notasi S_n** adalah jumlah n suku dari deret geometri dan dirumuskan

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ dan } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ untuk } r \neq 1.$$

- **Limit jumlah S** , dengan $S = \frac{a}{1-r}$ adalah nilai limit dari deret geometri tak hingga yang konvergen
- **Barisan Berderajat Satu** adalah suatu barisan yang diperoleh dengan proses pengurangan terhadap suku-suku yang berturutan dan didapat selisih tetap pada pengurangan tingkat(tahap) satu. Rumus umum suku ke- n berbentuk $u_n = a n + b$, dengan a dan b adalah konstanta riil.
- **Barisan Berderajat Dua** adalah suatu barisan yang diperoleh dengan proses pengurangan terhadap suku-suku yang berturutan dan didapat selisih tetap pada pengurangan tingkat(tahap) kedua. Rumus umum suku ke- n berbentuk $u_n = a n^2 + b n + c$, dengan a, b, c adalah konstanta riil
- **Barisan Berderajat Tiga** adalah suatu barisan yang diperoleh dengan proses pengurangan terhadap suku-suku yang berturutan dan didapat selisih tetap pada pengurangan tingkat(tahap) ketiga. Rumus umum suku ke- n berbentuk $u_n = a n^3 + b n^2 + c n + d$, dengan a, b, c , dan d adalah konstanta riil
- **Barisan Bertingkat yang mempunyai landasan barisan geometri** adalah suatu barisan yang didapat dari proses pengurangan suku-suku yang berturutan dari barisan geometri dalam beberapa tingkat pengurangan
- **Notasi Sigma** ($\sum_1^n i$) adalah suatu notasi yang mewakili suatu penjumlahan berurutan dari $i=1$ ke $i=n$.

